Euclides

816
357
492

Vakblad voor de wiskundeleraar

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wolters-Noordhoff

jaargang 67 1991 | 1992 februari/maart

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
Drs J. H. de Geus
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
D. Prins (secretaris)
Ir. V. E. Schmidt (penningmeester)
Mw. Y. Schuringa-Schogt (eindredacteur)
Mw. Drs A. Verweij
A. van der Wal
Drs G. Zwaneveld (voorzitter)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:
- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

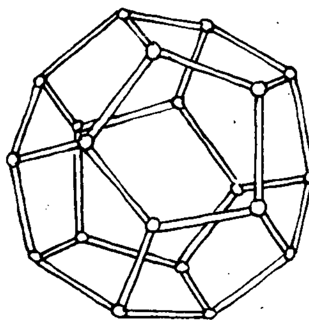
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ60,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ39,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ10,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Inhoud



Staafjesmodel.

● Actualiteit ● ● ● ●

▶ Euclides en W12-16

In 1992 eindigen de werkzaamheden van de COW. Het ontwikkelteam W 12-16, dat onder de verantwoordelijkheid van de COW valt, houdt dus ook op te bestaan.
In zekere zin is dit einde een mijlpaal. In 1992 moet de COW een advies gereed hebben inzake de hele onderbouwwiskunde. Zoals het nu lijkt zullen enkele dingen grondig veranderen. In dit artikel gaat het hoofdzakelijk over de vraag: wat gaat Euclides nu doen?

Special

Nummer 9 van de lopende jaargang wordt een special, gewijd aan de resultaten van het COW- en W 12-16-werk. De redactie hoopt, vanuit een onafhankelijke positie, een beschrijving en een evaluatie te brengen van de COW-voorstellen en de W 12-16-produkten. Inmiddels worden mensen aangezocht om de special méé gestalte te geven. Uiteraard is plaats gereserveerd voor een reactie van COW-zijde. Jan de Lange, voorzitter van de COW, heeft toegezegd voor een inleiding te zorgen.

Middenin

Middenin blijven deze jaargang zeker nog de bijdragen vanuit het team W 12-16 verschijnen, telkens twee werkbladen plus begeleidende tekst, geschreven door mensen uit de proefscholen of uit het team W 12-16, en gecoördineerd door Truus Dekker. Graag zeggen we op deze plaats, dat we Truus Dekker veel dank verschuldigd zijn. In twee jaar tijds zullen er straks 36 W 12-16-werkbladen in Euclides gepubliceerd zijn.

Andere bijdragen

In het najaar van 1991 zijn weer regionale bijeenkomsten gehouden, georganiseerd door de NVvW, en met de nieuwe onderbouw-wiskunde als hoofdthema. Op de studiedag van de NVvW stond ook de onderbouwwiskunde centraal, ditmaal met het oog op de toetsing. Verslaggeving van deze bijeenkomsten volgt nog.
Het afgelopen jaar hebben Joop van Dormolen en Francis Meester, die namens de NVvW zitting hebben in de COW, al driemaal geschreven over de achtergronden van de beoogde wijzigingen. In verscheidene bijdragen zijn allerlei andere aspecten belicht – min of meer kritisch, zoals dat dan gaat.

En verder

De COW werkt momenteel aan het uit te brengen advies over de onderbouwwiskunde. Het gaat dan over leerplanvernieuwing, inpassing in de basisvorming, en nascholing. Van het mavo/lbo-C/D-programma zijn in 1990 en in 1991 versies gepubliceerd. De Leerstofbeschrijving, meegestuurd met nummer 1 van Euclides in september jongstleden, geeft een aardig beeld van de beoogde leerplanvernieuwing en inpassing in de basisvorming. De Euclides-redactie stelde prijs op het meezenden van deze Leerstofbeschrijving vanwege de informatieve waarde ervan. Via andere kanalen (SLO en OW & OC/Freudenthal instituut) hebben COW en team W 12-16 het een en ander naar buiten gebracht. In het kader hiervan zijn onder andere zogenaamde Wiskrant-specials naar scholen gestuurd.
Men leze wat er te lezen is.

De redactie

▶ Reizen en trekken

M. C. van Hoorn

Evenals in 1990 trokken in het najaar van 1991 COW-leden, bestuursleden van de NVvW en vooral veel leraren naar 2 maal 12 regionale bijeenkomsten, en/of naar de studiedag van de NVvW.
Er gaat iets veranderen, zegt men, zie maar hoeveel materiaal er al is. Helaas blijkt het Trajectenboek, het boek waarin 't meeste staat over de 'reis' die het wiskundeonderwijs in de eerste fase moet maken, lastig verkrijgbaar. Ikzelf heb het op het moment waarop ik dit schrijf, al twee keer besteld en nog maar net ontvangen. Dit stukje is dus niet gebaseerd op volledige kennis van zaken.

Wat verandert er eigenlijk?

De hoofdzaak is dat er vorm wordt gegeven aan allerlei wensen tot modernisering. Die vorm verschijnt in de gestalte van een nieuw leerplan.
Laten we niet denken, dat alleen nieuwe leerplannen het wiskundeonderwijs veranderen. In feite was er al jarenlang geen nieuw leerplan verschenen, terwijl toch de inhoud van leerboeken nu heel anders is dan 10 of 20 jaar geleden. Al te traditionele leerboeken zijn zelfs bezig te verdwijnen.
Een nieuw leerplan is nodig omdat er afspraken nodig zijn over de concrete invulling. Wat doen we met vectoren? Wat doen we met contexten? Wat doen we met ontbinden in factoren? 't Zijn allemaal zaken waar de afgelopen jaren discussie over is gevoerd. 't Voornaamste is, dat er meer eenheid komt – voor hoe lang, dat blijkt pas later.
De huidige plannen van de COW kunnen desondanks aanleiding geven tot een andere veronderstelling. Is het niet zo, dat de COW veel meer wil wijzigen dan door de omstandigheden gegeven is? Is het niet zo, dat de COW er ècht een vernieuwing van wil maken? Loopt de COW vooruit op ontwikkelingen? 't Zijn slechts vragen. Op enkele van de regionale bijeenkomsten – niet overal – werden ze gesteld.

Groeiende (on)zekerheid

Op de regionale bijeenkomsten is veel informatie verstrekt, en veel is toegelicht. Wat blijft, is dat de vormgeving van het nieuwe programma in feite buiten de lerarenwereld om geschied is. De implementatie, de algehele invoering moet nog komen; die kan niet buiten de leraren om geschieden!
Velen verheugen zich op de komst van een nieuw leerplan. Het oude mavo/lbo-C/D-leerplan is versleten, uitgebeend ook. Weg ermee – als maar niet met het badwater het kind wordt weggegooid. Als maar niet, met het nieuwe leerplan, leemtes worden ingevoerd.
De vragen die op verscheidene van de bijeenkomsten werden gesteld, leken beslist verband te houden met zorgen. Stel dat het gepresenteerde leerplan werkelijkheid wordt. Moet ik die wiskunde dan geven? Of: moet ik dan, in havo (B) of mts, m'n programma aanpassen?
Wie – zoals de COW doet – bepleit dat de wiskundige begrippen voor de leerlingen veel geleidelijker worden ontwikkeld, had al wel eerder de consequenties voor noodzakelijke nascholing mogen overdenken. Dat was ook een deel van de opdracht die de COW kreeg.

De studiedag

De studiedag van de NVvW stond in het teken van de toetsing. De lezingen van Jan de Lange (humoristisch) en Truus Dekker (serieuzer en minstens zo humoristisch) worden in Euclides opgenomen. Bij

dit verslagje voegen we een kopie uit de examenbundel 1991 van de COW. Deze kopie toont behalve twee opgaven uit de experimentele examens van het afgelopen jaar ook de bijbehorende normen. Ook hier een enorm verschil met wat nu nog gebruikelijk is: niet meer een dominante gesloten vraagstelling; en een norm die vooral duidelijk maakt dat een goede aanpak van de leerling beloond moet worden. Verfrissend!
Het omgaan met zulke opgaven en normen vraagt blijvende inzet van alle betrokkenen. Anders komen we (weer) in een trukendoos terecht.
De uitdaging die blijft, is dat de leerlingen beter leren begrijpen wat ze doen èn dat ze een behoorlijk stel vaardigheden ontwikkelen – die op niveau getoetst worden. Welke vaardigheden worden eigenlijk getoetst in de bijgevoegde opgaven?

Aandachtspunten

Over van alles en nog wat is discussie mogelijk. Over hoofdlijnen en over details. Dat moet ook allemaal. Een goed gevoerde discussie kan alleen maar in positieve zin bijdragen aan een afgewogen eindprodukt.
Enerzijds begint zich toch zoiets af te tekenen als consensus, overeenstemming (zo men wil berusting) over de aard van de veranderingen. Maar anderzijds blijkt er nog heel wat zorg te zijn, begrijpelijke zorg. Er zijn dan twee zaken die er telkens weer uitspringen:
– de toekomst van de *algebraïsche vaardigheden*. Is de doordenking op dit punt voldoende grondig geweest? Daarover heerst twijfel.
– de *nascholing* van de docenten, gezien in het licht van de spoedige invoering. Natuurlijk is iedereen ook benieuwd naar lesmateriaal. Maar lesmateriaal verschaffen is iets anders dan nascholing geven. Vergeleken met andere wijzigingen (Hewet, Hawex) is ditmaal een veel uitgebreidere nascholing nodig, simpelweg omdat er veel meer docenten bij betrokken zijn. Maar zelfs zijn er tot dusverre minder in plaats van meer experimenteerscholen. Bij Hewet en Hawex was zo'n 5% van de scholen experimenteerschool; bij de vernieuwing van de onderbouwwiskunde is dit minder dan 1%. Er zijn op dit moment – naar verhouding – nog maar heel weinig docenten met ervaring met het nieuwe leerplan, terwijl de nascholing nog op gang moet komen.
Invoering in 1993 en nu nog 1½ jaar te gaan.
Het reizen en trekken is nog lang niet afgelopen.

Noot

Op blz. 165 en 166 staan de in dit artikel genoemde examenvragen met normering.

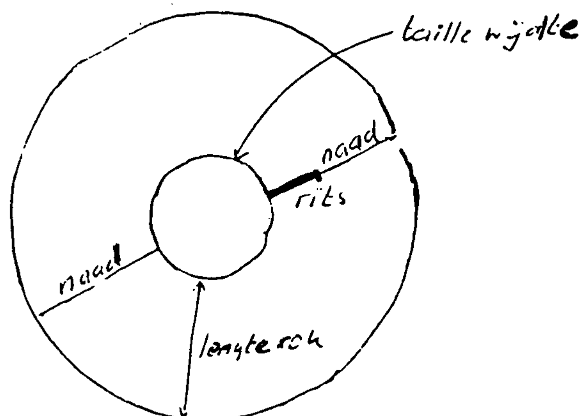
▶ Oproep

De komende jaren verandert er veel in het wiskundeprogramma voor de leerlingen van 12 tot 16 jaar. Euclides zal daar behoorlijk veel aandacht aan besteden. De redactie van Euclides wil zich daarom uitbreiden. Zij zoekt een redacteur (m/v) met name onder de docenten wiskunde uit het lbo/mavo.
De werkzaamheden van redacteuren bestaan uit het mede beoordelen van binnen gekomen artikelen, het stimuleren van collega's om van hun ervaringen in de klas in Euclides verslag te doen, zelf af en toe een bijdrage te leveren aan Euclides en het meebepalen van het redactionele beleid op de redactievergadering. Deze vergadering vindt drie keer per jaar plaats.
Iedereen uit genoemde sector die een klein beetje tijd aan het wiskundeonderwijs wil besteden, wordt uitgenodigd zich bij de voorzitter van de redactie te melden: Bert Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht, tel. 043 - 25 64 13. Tot de procedure hoort een gesprek met een aantal leden van de kernredactie van Euclides en een vertegenwoordiger van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

▶ C-examen tijdvak 2, 1991

De opgaven 4 en 5 horen bij elkaar

Het zusje van Wilma is bij de majorettes gegaan en heeft daarvoor een cirkelrok nodig. Wilma heeft beloofd die voor haar te maken.
Ze heeft een schets van een patroon van de rok gemaakt en de maten genoteerd:





taillewijdte	56 cm (gemeten om je middel)
lengte rok	40 cm

4. Teken het patroon voor de halve cirkelrok op schaal.
   Schrijf de berekeningen op die je daarvoor gemaakt hebt.

5. Wilma koopt een lap stof van 90 cm breed. Hoe lang moet die lap zijn?
   Afronden op 10 cm.

Antwoorden en normering

	aantal punten
4. Tekening patroon 2 punten, verklaring 2 punten	4
5. Bijvoorbeeld 2 m, andere antwoorden mogelijk antwoord 1 punt, verklaring 2 punten	3

▶ D-examen tijdvak 1, 1991

De opgaven 1 t/m 4 horen bij elkaar. Ze gaan over dit kranteberichte:

Marianne Muis vestigt twee zwemrecords

BONN (SID) – Marianne Muis deed het goed bij de wereldbekerwedstrijden zwemmen in Bonn, maar zaterdag bleek op de 200 meter vrije slag, waarop zij juist haar zinnen had gezet, de 16 jarige Deense Jacobsen een fractie van een seconde sneller.

Het gat dat Marianne op de eerste honderd meter liet vallen, was net te groot om overbrugd te worden, al loste zij met een tijd van 1.57,14 (tegenover de 1.57,08 van Jacobsen) wel illustere voorgangers als wereldkampioene Annemarie Verstappen, Conny van Bentum en Enith Brigitha af als nationaal recordhoudster.

tijd 1.57,14 betekent 1 minuut en $57\frac{14}{100}$ seconden.

1. Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur van Marianne Muis tijdens de 200 m vrije slag.

(2) Hoeveel honderdsten van een seconde was de Deense Jacobsen sneller?

3. Hoever lag Marianne achter toen de Deense finishte?

In sportkringen wordt vaak gesproken over een armlengte, een handbreedte of duimbreedte verschil.

4. Welke van die woorden zou jij in dit geval kiezen?

Antwoorden en normering

	aantal punten
1. ± 6 km/u, antwoord 1 punt, verklaring 2 punten	3
2. $\frac{6}{100}$ sec. (antwoord 6 ook goed rekenen)	2
3. ± 10 cm, antwoord 1 punt, verklaring 2 punten	3
4. Handbreedte, met verklaring	2

● Bijdrage ● ● ● ●



▶ De 30ste Nederlandse Wiskunde Olympiade 1991

H. N. Schuring

De eerste ronde

Op vrijdag 1 maart 1991 is de eerste ronde gespeeld. Alle scholen voor havo en vwo zijn uitgenodigd om leerlingen, geen vwo eindexamenkandidaten, hieraan mee te laten doen. Gedurende drie uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.
De wedstrijdleiders van 231 scholen hebben het resultatenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 2269 deelnemers in nevenstaand overzicht verwerkt kon worden.

De cesuur is gelegd bij score 20, wat zeggen wil dat deelnemers die 20 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde.
Van de 93 deelnemers, die uitgenodigd zijn voor de tweede ronde, komen er 79 uit 5 vwo en 14 uit 4 vwo.

Van het Jacob Roelandslyceum te Boxtel is de somscore van de beste vijf deelnemers 119. Dit resultaat is de hoogste van het land, zodat deze school de Shell-wisselprijs behaald heeft. Deze prijs is op 5 juni 1991 op de school te Boxtel uitgereikt.

score	freq.	cum. freq.	score	freq.	cum. freq.
36	1	1	18	43	168
35	—	1	17	23	191
34	2	3	16	46	237
33	2	5	15	54	291
32	2	7	14	49	340
31	—	7	13	134	474
30	2	9	12	58	532
29	2	11	11	112	644
28	3	14	10	93	737
27	4	18	9	137	874
26	6	24	8	175	1049
25	7	31	7	121	1170
24	5	36	6	219	1389
23	13	49	5	82	1471
22	8	57	4	258	1729
21	15	72	3	29	1758
20	21	93	2	290	2048
cesuur			1	1	2049
19	32	125	0	220	2269

De door de Staatssecretaris ingestelde wisselprijs voor meisjes heeft opgehouden te bestaan, zodat deze prijs niet meer uitgereikt zal worden.

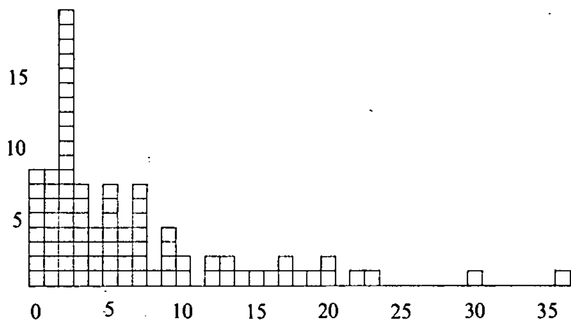
De tweede ronde

Op 6 september 1991 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 93 uitgenodigde leerlingen hebben er 88 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vijf opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.

Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende tien deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1991:

	2e ronde	*1e ronde*
1. Chris Stolk, Bunnik	36 punten	36 punten
2. Herman Haverkort, Arnhem	30 punten	33 punten
3. Timco Visser, Hengelo	23 punten	20 punten
4. Jan de Wit, Bergen op Zoom	22 punten	29 punten
5. Raoul Trines, Eindhoven	20 punten	32 punten
6. Piotr Ptasinski, Eindhoven	20 punten	24 punten
7. Leon Jacobs, Nederweert	19 punten	23 punten
8. Heike Gramberg, Nuenen	18 punten	33 punten
9. Willem van den Bosch, Boxtel	17 punten	32 punten
10. Thorsten Gragert, Enschede	17 punten	20 punten

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.

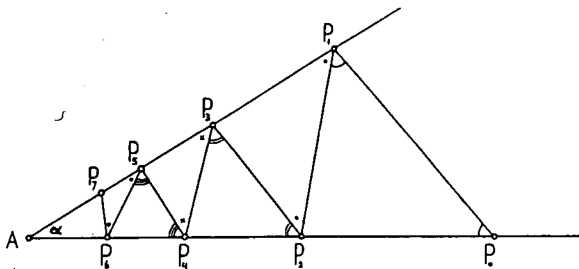


Opgaven

1. Bewijs dat voor elk drietal positieve reële getallen a, b en c geldt:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{a+b+c}$$

2. Gegeven zijn een hoek $A = \alpha$ met $0 < \alpha < \pi$ en het punt P_0 op een van de benen van de hoek met $AP_0 = 2$. Op het andere been van de hoek wordt een punt P_1 gekozen. Voor zover mogelijk worden nu de punten $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ getekend steeds zo dat P_n ligt tussen A en P_{n-2} en $\triangle P_nP_{n-1}P_{n-2}$ gelijkbenig is met top P_n (dus $P_nP_{n-1} = P_nP_{n-2}$ voor $n \geq 2$). Zie tekening waarbij de rij afbreekt na P_7.



a) Bewijs dat er bij elke waarde van α precies één punt P_1 gekozen kan worden zodanig dat de rij P_1, $P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ niet afbreekt.

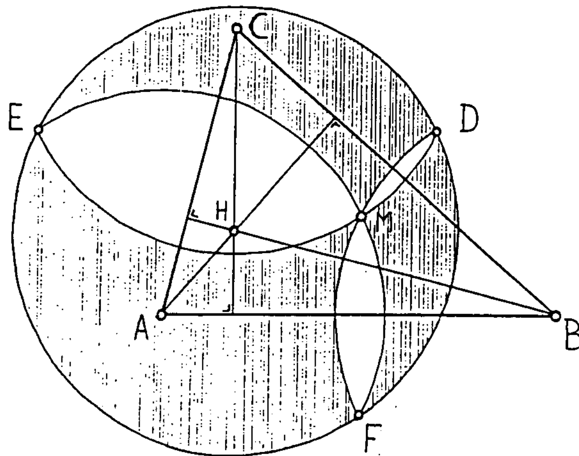
b) Gegeven is dat de rij $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ niet afbreekt en dat de lengte van het gebroken (zigzag) lijnstuk $P_0P_1P_2P_3\ldots P_k$ tot 5 nadert als k naar oneindig gaat.
Bereken de lengte van P_0P_1.

3. f is een reële functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:
$4f(f(x)) - 2f(x) - 3x = 0$

Bewijs dat f alleen bij $x = 0$ de waarde 0 aanneemt.

4. Van drie reële getallen a, b en c is gegeven:
$a + b + c = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9, a^3 + b^3 + c^3 = 24$

Bereken $a^4 + b^4 + c^4$



5. Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H.
M is het middelpunt en R de lengte van de straal van de omgeschreven cirkel; notatie cirkel (M, R).
Cirkel (A, R) en cirkel (B, R) snijden elkaar in de punten M en F,
cirkel (A, R) en cirkel (C, R) snijden elkaar in M en E en
cirkel (B, R) en cirkel (C, R) snijden elkaar in M en D.

Bewijs
a) De punten D, E en F liggen op cirkel (H, R).
b) De oppervlakte van het gebied dat bestaat uit cirkel (H, R) zonder de drie gebieden die gevormd worden door de bogen MD, ME en MF (zie het gearceerde deel in de figuur) is gelijk aan tweemaal de oppervlakte van $\triangle ABC$.

Oplossingen

1. Noem $a + b = x$, $b + c = y$ en $c + a = z$. Dan te bewijzen dat voor positieve reële getallen x, y en z geldt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

evenzo $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ en $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2$

Uit deze drie ongelijkheden volgt:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) =$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + 3 \geq$$

$$2 + 2 + 2 + 3 = 9 =$$

$$(x + y + z)\frac{9}{x + y + z}$$

Linker- en rechterlid delen door $x + y + z$ voltooit het bewijs.

2. Noem $\angle AP_nP_{n+1} = x_n$. P_{n+2} kan getekend worden dan en slechts dan als $180° - 2x_n > \alpha$, dus als $x_n < \frac{1}{2}(180° - \alpha)$. Verder is $x_{n+1} = 180° - \alpha - 2x_n$.

a) Stel $x_0 = \frac{1}{3}(180° - \alpha) + y$. Dan is $x_n = \frac{1}{3}(180° - \alpha) + (-2)^n y$, te bewijzen met volledige inductie. Het is duidelijk dat de rij $\{P_n\}$ alleen dan afbreekt als $y = 0$.

b) Uit het gegeven volgt $x_n = \frac{1}{3}(180° - \alpha)$ voor alle n. Bovendien is $P_0P_1 + AP_0 + AP_1 = 5$ en dus $AP_1 + P_1P_0 = 3$. Laat $t = P_0P_1$ en $u = P_1P_2 = P_2P_0$. Uit de gelijkvormigheid van $\triangle AP_0P_1$ en $\triangle AP_1P_2$ volgt:

$$\frac{2}{3 - t} = \frac{3 - t}{2 - u} = \frac{t}{u} \text{ ofwel}$$

$(3 - t)^2 = 4 - 2u$ en $2u = 3t - t^2$

zodat $(3 - t)^2 + (3 - t)t = 4$

dus $P_0P_1 = t = \frac{5}{3}$.

3. Noem $f(0) = a$, dan geldt:

$4f(f(0)) - 2f(0) = 0,\ 4f(a) - 2a = 0,\ f(a) = \frac{1}{2}a.$

Voor $x = a$ geldt:

$4f(f(a)) - 2f(a) - 3a = 0,$

$4f(\frac{1}{2}a) - 2f(a) - 3a = 0,\ f(\frac{1}{2}a) = a.$

Voor $x = \frac{1}{2}a$ geldt: $4f(f(\frac{1}{2}a)) - 2f(\frac{1}{2}a) - \frac{3}{2}a = 0,$

$4f(a) - 2a - \frac{3}{2}a = 0,\ a = 0$. Dus $f(0) = 0$.

Veronderstel $f(b) = 0$ dan geldt:

$f(f(b)) - 2f(b) - 3b = 0,\ f(0) - 0 - 3b = 0$ dus $b = 0$. 0 is dus het enige nulpunt van f.

($f(x) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13})x$ is een voorbeeld van een functie die voldoet aan het gestelde)

4. $a + b + c = 3,\ a^2 + b^2 + c^2 = 9,$

$a^3 + b^3 + c^3 = 24.$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$9 = 9 + 2ab + 2ac + 2bc$

$ab + ac + bc = 0$ (1)

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$

$27 = 24 + 6abc + 3a(b^2 + c^2) + 3b(a^2 + c^2) + 3c(a^2 + b^2)$

$1 = 2abc + a(9 - a^2) + b(9 - b^2) + c(9 - c^2)$

$= 2abc + 9(a + b + c) - (a^3 + b^3 + c^3)$

$1 = 2abc + 27 - 24$

$abc = -1$ (2)

$(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) = a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b$

$= a^4 + b^4 + c^4 + ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2)$

$= a^4 + b^4 + c^4 + ab(9 - c^2) + ac(9 - b^2) + bc(9 - a^2)$

$= a^4 + b^4 + c^4 + 9(ab + ac + bc) - abc(a + b + c)$ (3)

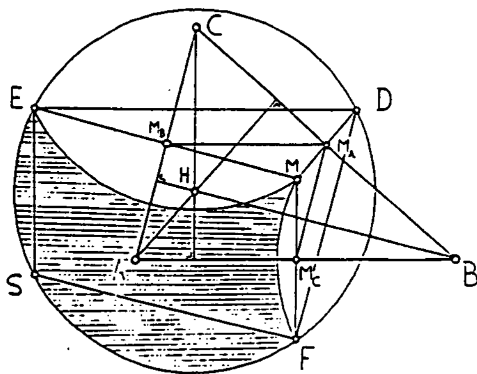
Met behulp van (1), (2) en (3) vinden we dan:

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) - 9(ab + ac + bc) + abc(a + b + c) =$

$24 \times 3 - 3 = 69.$

5.a. De vierhoeken $MBDC$, $MCEA$ en $MAFB$ zijn ruiten. De snijpunten van de diagonalen noemen we resp. M_A, M_B en M_C. (zie fig. blz. 170) Dan is M_AM_C middenparallel in $\triangle ABC$ én $\triangle MFD$. Dus $DF = AC$ én $DF // AC$. Evenzo geldt: $DE = AB$ én $DE // AB$, $EF = BC$ én $EF // BC$. Er is dus een puntspiegeling S, die $\triangle ABC$ overvoert in $\triangle DEF$ en

omgekeerd. Bovendien is M het hoogtepunt van $\triangle DEF$, immers $MF \perp AB$, dus $MF \perp DE$ enz., zodat $S(M) = H$. Onder de afbeelding S gaat dus cirkel (M, R), de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, over in cirkel (H, R), de omgeschreven cirkel van $\triangle DEF$.
b. Uit $S(F) = C$ en $S(M) = H$ volgt $MF = HC$, dus is $CHFM$ een parallellogram (notatie par). Laat de lijn door E, die loodrecht staat op AB de cirkel: (H, R) nog snijden in S. Dan is $ES // CH$ en ook $ES = CH$, want $CE = HE = HS = R$, dus $\triangle CEH \cong \triangle EHS$. $CESH$ is dus een par, maar dan is ook $ESFM$ een par. Bij de translatie die C in H overvoert, worden E in S, M in F en cirkel (C, R) in cirkel (H, R) overgevoerd. De oppervlakte van het cirkelsegment in cirkel (C, R), ingesloten door koorde EM en de (kleinste) boog EM is gelijk aan de oppervlakte van het cirkelsegment in cirkel (H, R), ingesloten door koorde SF en de (kleinste) boog SF.
Analoog zijn ook de oppervlakten van de segmenten ingesloten door koorde MF en boog MF en koorde ES en boog ES gelijk. De oppervlakte van het gearceerde deel in de figuur is dus gelijk aan opp. par. $ESFM = 2 \cdot$ opp. $\triangle MEF$. Op dezelfde wijze is direkt in te zien dat de oppervlakten van de andere gebieden gelijk zijn aan resp.
$2 \cdot$ opp. $\triangle MDE$ en $2 \cdot$ opp. $\triangle MFD$. De oppervlakte van het totale gearceerde gebied in de figuur behorende bij de opgave is dus twee keer de som van de oppervlakten van de driehoeken MEF, MFD en MDE ofwel $= 2 \cdot$ opp. $\triangle DEF = 2 \cdot$ opp. $\triangle ABC$.



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

▶ Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Extra kerndoel?

In Euclides nr. 5 op pagina 131 heeft u kunnen lezen dat de Commissie Herziening Eindtermen heeft voorgesteld aan de eindtermen wiskunde een kerndoel goniometrie toe te voegen. Reeds op 4 december 1991 heeft het bestuur van de NVvW er bij de Staatssecretaris met klem op aangedrongen dit voorstel **niet** over te nemen. Goniometrische verhoudingen worden volgens de plannen van de COW[1] namelijk behandeld in klas 4 mavo-D, respectievelijk in klas 3 havo-vwo, nadat voor deze leerlingen in de voorgaande jaren alle stof behorend bij de 27 kerndoelen van de basisvorming behandeld is.

Adviezen aan de COW

Na de regionale bijeenkomsten is er voor de leden van onze werkgroepen eind november een VALO[2]-conferentie geweest. Hier zijn de bijgewerkte COW-plannen, zoals verwoord in het tweede concept examenprogramma mavo/lbo C/D en het Trajectenboek (waarvan u de 'Leerstofbeschrijving wiskunde 12-16' met Euclides nr. 1 meegezonden kreeg) uitgebreid, ook in detail, besproken en becommentarieerd.
De leden van de VALO zowel als het bestuur van de

NVvW kregen het verzoek van de COW om voor de COW-vergadering van januari, alvast voorlopige adviezen uit te brengen aangaande het rapport dat de COW in de zomer van 1992 aan de staatssecretaris zal uitbrengen.
Hieronder volgt een verkorte versie van dit voorlopige NVvW-advies.

Inleiding

Gehoord, gelezen en gewogen de vele meningen die onze leden naar voren brachten, constateren wij als bestuur een grote mate van waardering voor de bijgewerkte plannen, zoals verwoord in het tweede concept examenprogramma mavo/lbo C/D en het Trajectenboek van augustus 1991 van het team W12-16.
De reeds in de bovenbouw havo/vwo ingezette tendens om meer met contextrijke, maatschappelijk georiënteerde wiskunde te werken en de reeds in de basisschool ingezette tendens tot realistisch rekenen worden naar onze mening beide terecht doorgevoerd in het W12-16-programma.
Het is goed dat alle leerlingen leren om kritisch allerlei situaties te beoordelen; een uitgangspunt als de driedimensionale kijkmeetkunde sluit hier goed bij aan. Een onderdeel als GWA[3] dat veel initiatieven van docenten en leerlingen zal vragen is naar onze mening nuttig om de wiskunde in een zo breed mogelijk maatschappelijk kader te plaatsen. De uitgebreide aandacht voor statistiek en meetkunde geeft goede mogelijkheden voor GWA.
Een ieder die het tweede concept examenprogramma naast het vigerende programma legt, zal zeker dierbare onderdelen missen, immers: kiezen doet verliezen. Geconstateerd moet echter worden dat een leerling die dit programma met succes heeft doorgewerkt, wiskundig goed beslagen de maatschappij ingaat.

Aanbevelingen

1. De indruk bestaat dat het gemiddeld aantal uren voor wiskunde volgens het huidige D-programma op mavoscholen (zowel in scholengemeenschappen als categoriaal) dichter bij 15 ligt dan bij 14. Wij adviseren om van deze 15 uur uit te gaan, in plaats van van de vermelde 14 uur. Er zullen dan meer leerlingen in staat zijn het nieuwe D-examen te halen. Tevens kunnen dan goede leerlingen die voor havo B of mts in aanmerking komen, binnen de lestijd de voor 4-havo B ontbrekende stof doorwerken. Wij raden af deze aansluitingsmoeilijkheden op te lossen door een 'brugboek' dat de leerlingen zelf (en dus met hulp van docenten in hun vrije tijd!) moeten doorwerken; voor laatbloeiers zou daarmee de kans op succes wel erg verkleind worden.

2. De aantallen lesuren voor de andere trajecten moeten beschouwd worden als minimaal noodzakelijk om de programma's uit te voeren. Zeker omdat op veel lbo-scholen op het ogenblik minder lesuren voor wiskunde ter beschikking staan, dienen de staatssecretaris en de directies van scholen van deze noodzaak expliciet doordrongen te worden.

3. Wij zijn van mening dat de uren besteed aan de boxplot, beter gebruikt kunnen worden voor algebra, bij voorkeur het onderwerp grafieken vervormen. Hierdoor komt er ruimte om grafieken ook horizontaal te verschuiven, bv.
$y = x^2 \rightarrow y = (x + 2)^2$.

4. De huidige praktijk is dat B- en C-leerlingen vaak niet bij elkaar zitten in klas 3 en 4. Door één traject voor klas 3BC op te nemen wordt de indruk gewekt dat er geen bezwaren kleven aan een gemengde 3BC klas. Wij menen dat de kans op het halen van het C-examen, door de grote niveauverschillen in een 3BC-klas, beslist verkleind wordt. Wij adviseren dan ook om in klas 3 de B- en C-trajecten los te koppelen. Hierdoor wordt het tevens mogelijk om de extra voor het C-traject genoemde 6 uren 'rekenen met variabelen' binnen de totale 90 uren te laten vallen. En wel door 6 andere onderwerpen elk 1 uur minder te geven.

5. Leerstofinhouden als 'Situaties en verbanden' uit klas 3C/D behoren ook tot de te trainen examenstof. Vermeld dient te worden dat formules zoals de abc-formule en de cosinusregel ook in dit kader kunnen voorkomen als formules die bij een bepaalde situatie of op de formulekaart gegeven worden.

6. Redeneren moet plaats vinden bij zoveel mogelijk leerstofonderdelen en aangepast aan het niveau van de diverse groepen leerlingen. Op B-, C- en D-niveau zal dit bijna uitsluitend kunnen bestaan uit het exemplarisch toetsen van een vermoeden, hetgeen betekent dat hier geen sprake is van een exacte bewijsvoering. Maar aangepast aan elk niveau moet toch een antwoord gegeven kunnen worden op de vraag: (waarom) is dit altijd zo?
Voor het vwo adviseren wij naast redeneren ook bewijzen aan de orde te laten komen en dit niet louter aan meetkundige figuren.
Wij zouden hier, in plaats van de 5 genoemde, minimaal 9 uur willen voorstellen, en de ontbrekende 4 uur willen verkrijgen door het bewijzen te incorporeren in andere onderwerpen waarbij dit te beoefenen valt.

7. Daar in het examenprogramma het 'wortelverband' wel voorkomt, dient dit aan het 3C/D traject te worden toegevoegd.

8. Wij adviseren om in de 'meer samenhangende beschrijving van achtergronden bij de nieuwe programma's' ook op te nemen waarom gekozen is voor het laten vervallen van bepaalde algebraïsche vaardigheden, zoals ontbinden in factoren, kwadraatafsplitsen en verdere 'parabolencultuur'. Eveneens waarom gekozen is voor het wel opnemen van 3-dimensionale coördinaten en bv. geen puntverzamelingen.
Bij de verantwoording dient duidelijk te worden aangegeven welke algebraïsche vaardigheden, op verzoek van het veld, na najaar 1990, toegevoegd zijn aan de voorlopige plannen en welke onderdelen er daardoor minder aandacht krijgen dan in de eerste plannen.

9. Wij adviseren dat aan bevoegde instanties doorgegeven wordt dat bij toetsing gelet moet worden op het gebruik van korte contexten uit heel verschillende levensgebieden. Leerlingen, die door een negatieve emotionele binding met een bepaalde context, een opgave 'verknallen', kunnen dan nog genoeg andere opgaven goed maken.
Bij het opstellen van toetsvragen dient de doelstelling van een vraag centraal te staan. De te gebruiken context moet in overeenstemming zijn met deze doelstelling en mag niet als ruis werken.

10. Wij adviseren expliciet aan te geven dat GWA in de basisvorming en in het schoolonderzoek van het C- en D-examen getoetst dient te worden, om te voorkomen dat gedacht wordt dat dit onderdeel 'wel overgeslagen kan worden'. Daarom is het noodzakelijk dat de COW zorgt voor goede voorbeelden, waardoor het de docent mogelijk gemaakt wordt om een verstandige invulling aan GWA te geven, zonder dat het teveel tijd kost.

11. Wij adviseren om in het 3-havo-traject duidelijk aan te geven welke leerstof voorbereidt op A- en welke op B-wiskunde. Tot nu toe was het voor 3-havo-leerlingen lastig zich iets voor te stellen bij wiskunde A. Er moet voorkomen worden dat door gebrek aan abstracte algebra in het 3-havo-traject, leerlingen nu alléén op grond van wel aanwezig ruimte-inzicht voor havo B kiezen.

12. Wij adviseren aan de staatssecretaris te verzoeken om ook minstens 2 vrouwen te betrekken bij de vervaardiging van de Cito voorbeeldtoetsen voor de basisvorming.
Er dient uitdrukkelijk aangegeven te worden dat deze toetsen geen meerkeuzevragen mogen bevatten.

13. De nomenclatuur dient eenduidig te worden, aansluitend bij andere vakken. De NVvW neemt wel initiatieven op dit gebied maar van overheidswege wordt tot nu toe hiervoor geen steun verleend. De nomenclatuur zou grote prioriteit moeten hebben. Ook de overheid moet het belang van eenduidige nomenclatuur in verband met de examens inzien. Wij adviseren de COW om hiervoor, in verband met de voortgang van het schrijven der leerboeken en experimentele examens (met hun voorbeeldwerking!), nu direct reeds aan te dringen op overheidssteun, aangezien deze zaak in louter vrije tijd niet snel genoeg te regelen is.

14. In het examenprogramma dient aangegeven te worden wat precies met opdrachten als 'bereken'

wordt bedoeld. Wanneer mag een leerling op schaal tekenen en dan meten, wanneer dient de stelling van Pythagoras gebruikt te worden en wanneer zijn beide correct?

15. De in het examenprogramma genoemde 3-dimensionale coördinaten dienen duidelijker omschreven te worden.

16. Zo ook ongelijkheden. Ongelijkheden met 2 variabelen, (vlakdelen bv.) dienen hier niet onder te vallen.

17. Hoewel het voor allochtone en dyslectische leerlingen heel nuttig is voor hun toekomstig functioneren om ook in de wiskundeles met contexten te moeten werken, moet hen het bedrijven van wiskunde op hun eigen wiskundig niveau door de contexten niet onmogelijk gemaakt worden. Wij adviseren de COW een apart onderzoek hieromtrent te laten verrichten, waarbij ook de eventuele mogelijkheden van examenfaciliteiten bekeken worden. (Is het wellicht mogelijk voor bepaalde leerlingen de contexten mondeling toe te lichten?)

18. Wij adviseren de COW om de experimentele examens t/m 1996 te publiceren, toegelicht met voorbeelden van leerlingenwerk.

19. In de tekst van het examenprogramma dienen de nog aanwezige onduidelijkheden weggenomen te worden.

20. Uit de leerstofbeschrijving moet duidelijker blijken dat leerstofonderdelen die zowel in het lbo als in het vwo aan de orde komen en hetzelfde aantal uren toegewezen krijgen, met verschillende diepgang behandeld moeten worden. Zeker voor het vwo (voorbereidend wetenschappelijk onderwijs!) is het belangrijk dat reeds in de onderbouw al duidelijk iets blijkt van het 'formele en abstracte' karakter van de wiskunde.

21. Met het oog op de evenwichtige opbouw van de leerboeken en examens ten aanzien van de beide seksen, verwijzen wij naar: 'Het vak wiskunde', in de folder 'Basisvorming. Nieuwe kans voor emancipatie in het onderwijs', uitgegeven door de Matem (najaar 1991).
Wij adviseren de COW, naast eigen gebruik, ook bekendheid aan deze folder te geven bij haar contacten met auteurteams. De in deze folder genoemde aanbeveling a. dient nog te worden uitgebreid met de opmerking dat in contexten mannen en vrouwen niet louter in seksespecifieke situaties te zien moeten zijn.

22. Er dient duidelijk vastgelegd te worden dat evaluatie na enkele jaren noodzakelijk is, en dat eventuele bijstellingen als gevolg hiervan ingevoerd kunnen worden. Ook vrouwen dienen hierbij betrokken te worden.
Bij deze evaluatie moet in het bijzonder gekeken worden of de deelname van meisjes in het wiskundeonderwijs verbeterd is door het nieuwe programma. Het gaat zowel om het percentage 'afhaaksters' enerzijds als de niveaukeuze anderzijds; d.w.z. ook A- of B-keuze in de bovenbouw havo-vwo.

23. Bij de nascholing dient ook aandacht besteed te worden aan:
1e. hoe de lestijd, besteed aan contextdiscussies, in de hand te houden is;
2e. hoe, door context veroorzaakte, heel verschillende verklaringen op waarde geschat kunnen worden.

24. De programma's kunnen alleen dan goed ingevoerd worden als er voldoende faciliteiten zijn voor her- en bijscholing. Een van de middelen hierbij is het oormerken van nascholingsgelden speciaal ten behoeve van wiskundedocenten.

Naast deze adviezen aan de COW, maakten wij ook een samenvatting van allerlei van leden ontvangen adviezen voor auteurteams, en gaven deze aan hen door.

Noten

1. COW = Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs
2. VALO = VeldAdvisering LeerplanOntwikkeling
3. GWA = Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten

Korrel

In de nieuwste catalogus van de bekende firma Wolters-Noordhoff wordt de uitgave 'Wiswijs' aangeprezen. Een uitgave volgens de begeleidende tekst vooral bedoeld voor volwassenenonderwijs, en bijvoorbeeld voor een colloquium doctum, met name voor de α- en γ-faculteiten.
Voor dat doel, zo meldt de folder, hebben de auteurs 'alle ballast achterwege gelaten'.
Voor wie niet weten mocht waaruit de ballast in het wiskundeonderwijs bestaat, verschaft de onmiddellijk daarop volgende zin voldoende duidelijkheid: 'Zo wordt er geen aandacht besteed aan de meetkunde'.
Wel wordt aandacht besteed aan: getallen, rekenen, eerste- en tweede-graads functies, vergelijkingen en ongelijkheden, en, in appendices, exponenten en logaritmen, differentiëren, kansrekening en combinatoriek en de rekenmachine. Voor de al wat oudere toekomstige student Frans die colloquium doctum doet ongetwijfeld een even nuttige als noodzakelijke voorkennis!
Voor γ-studenten was dacht ik wiskunde A zo'n nuttig, ja zelfs vereist vak, maar als je colloquium doctum doet is kennelijk een uitgeklede versie van de stof tot en met 4 VWO voldoende.
Zo leer je toch steeds wat bij, niet alleen over de (on)-zin van meetkunde-onderwijs, maar zelfs over de opvattingen die kennelijk op allerlei plaatsen over de zin van wiskunde blijken te bestaan.
P.S. Om teleurstelling te voorkomen: bij de tentamens aan de T.U. Delft voor colloquium doctum en opheffing deficiëntie wordt wel degelijk naar die onnutte meetkunde gevraagd, sterker nog: je moet gewoon de wiskunde-B-stof beheersen.

H. J. Smid, T.U. Delft.

Antwoord

In de catalogus van Wolters-Noordhoff staat op de pagina waar het boek 'Wiswijs' wordt gepresenteerd onder andere nadere informatie over de doelgroep.
De auteurs hebben niet de pretentie dat je ter voorbereiding op een studie aan de T.U. met leerstof die overeenkomt met de algebra uit de onderbouw en enkele onderdelen uit de wiskunde A van het vwo zou kunnen volstaan. Er wordt vermeld, dat in 'Wiswijs' de stof wordt behandeld die nodig is om colloquium doctum te kunnen doen voor een studie in de alfa- of gamma-faculteit. Het boek is ook ontstaan vanuit de praktijk van het opleiden van colloquium doctum-kandidaten voor niet-exacte studierichtingen. En daarbij is meetkunde inderdaad ballast gebleken.

Rens Houtman, uitgever wiskunde, W.N.

Mededeling

Het 28-ste Nederlands Mathematisch Congres

Onder de titel '**Differentiaalvergelijkingen op vwo en wo**' zal op het 28ste Nederlands Mathematisch Congres een symposium worden gehouden. De gedachten gaan uit naar een aantal voordrachten (op woensdagmiddag, de eerste congresdag, 22 april 1992), o.a. één over het 'Rapport van de Werkgroep Differentiaalvergelijkingen' (zie: Euclides, jaargang 89/90, nr. 2), een voordracht over hetgeen met de op het vwo behandelde stof aan toepassingen van differentiaalvergelijkingen kan worden gedaan, een voordracht over de ontwikkeling van een nieuwe cursus voor eerstejaars studenten en een practicum op de pc ter afsluiting van de middag.

Op de ochtend van de eerste congresdag is er een hoofdvoordracht met daarna vier parallelvoordrachten, voorts zijn er een boekententoonstelling en hard- en softwaredemonstraties.

Het 28-ste Nederlands Mathematisch Congres wordt op woensdag 22 en donderdag 23 april 1992 (de week na Pasen) gehouden in het gebouw voor Wiskunde en Elektrotechniek, Mekelweg 4, van de TU Delft.

Voor meer congresinformatie kunt u de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap, de januari-, februari- en maartnummers raadplegen.

Voor nadere inlichtingen en toezending van een inschrijfformulier (aan de inschrijving zijn voor leraren geen kosten verbonden) kunt u zich wenden tot de secretaris van de Congrescommissie:
Dr. ir. H. Lemei, Fac. TWI-Et, Postbus 5031, 2600 GA Delft, tel. (015)-783534, fax. (015)-787245.

● Serie ● ● ● ●

Wiskunde 12-16 (experimenteel)

▶ Regelmatige figuren

Peter van Wijk, Jolanda Hoffman

Voor leerlingen van alle niveaus is het belangrijk om ruimtelijke figuren in werkelijkheid te zien en eventueel ook zelf in elkaar te zetten. Nu is zelf maken met karton een heel gedoe in de klas. Sommige scholen gebruiken in plaats daarvan materiaal van 'LEKOPRO'. Dit systeem bestaat uit stevige, hardplastic 3-, 4-, 5- en 6-hoeken. Door een simpele maar doeltreffende constructie klik je ze gemakkelijk goed scharnierend in elkaar, zodat je allerlei ruimtefiguren kunt maken. Op die manier worden ruimtefiguren tastbaar zonder dat al teveel tijd verloren gaat aan knip- en plakwerk. Maar ook kunnen leerlingen die dat nodig hebben het materiaal gebruiken om snel te controleren of uitslagen van figuren goed getekend zijn en om regelmaat en eigenschappen te ontdekken in allerlei figuren. In een wiskundewerklokaal mag dergelijk materiaal eigenlijk niet ontbreken. Dat geldt ook voor hogere klassen dan de brugklas, de figuren zijn dan waarschijnlijk ingewikkelder maar ze blijven nodig voor een bepaalde groep die veel moeite heeft zich platte figuren ruimtelijk voor te stellen.

Op de werkbladen is slechts een klein deel van de mogelijkheden aangegeven, plaatjes van ruimtefiguren nemen nu eenmaal veel plaats in. De werkbladen zijn dan ook vooral bedoeld om u op ideeën te brengen die in uw eigen klas kunnen worden gebruikt.

In het begin van de brugklas wordt het materiaal door de leerlingen gebruikt voor simpele ruimtefiguren en hun uitslagen: kubus, piramide, prisma. Sommige scholen gaan later ook nog verder met ingewikkelder ruimtefiguren aan de hand van het pakketje 'Regelmatige veelvlakken'.
Op de sg Lelystad maken de leerlingen vóór ze aan het pakketje beginnen een serie regelmatige figuren bestaande uit driehoekjes. Ze krijgen de opdracht om figuren te bouwen met achtereenvolgens 3, 4, 5, 6, 7, ... driehoekjes. Elke figuur die gevonden wordt moet worden vastgelegd d.m.v. een uitslag op een driehoekig rooster. De aandacht wordt gevestigd op de regelmatigheid van viervlak, achtvlak en eventueel twintigvlak. Zodra de leerlingen goed door hebben wat een regelmatig veelvlak is kunnen ze de opdracht krijgen om met de vierkanten, vijfhoeken en zeshoeken ook regelmatige figuren te bouwen. Opvallend is dat bijna alle leerlingen in eerste instantie een voetbal een regelmatige figuur vinden.
Wiskundigen definiëren zoiets kennelijk anders! Pas als de aandacht gevestigd wordt op de vlakjes waaruit de voetbal is opgebouwd gaan de leerlingen er anders over denken. (Overigens hebben leerlingen in de bovenbouw bij biologie misschien iets gehoord van de zgn. 'voetbalmoleculen' of 'buckyballs', die zijn simpel na te bouwen. Zestig koolstofatomen vormen een 32-vlak van zes- en vijfhoeken.)

Natuurlijk kost dit alles tijd. Maar die krijg je beslist later terug omdat leerlingen die op deze manier met concreet materiaal gewerkt hebben een veel beter inzicht in ruimtefiguren hebben dan hun medeleerlingen die het alleen met afbeeldingen hebben moeten doen.

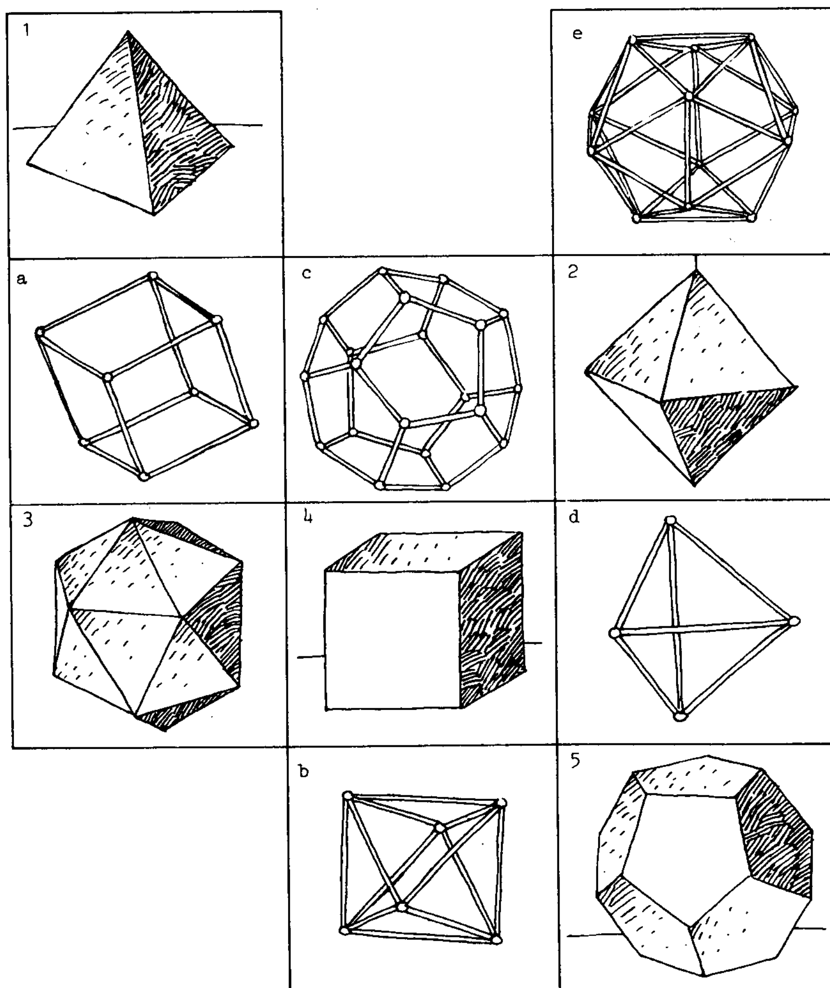
Over de auteurs
Peter van Wijk is verbonden aan College de Klop te Utrecht en Jolanda Hoffman aan de Scholengemeenschap Lelystad.

● Werkblad ●

▶ Regelmatige veelvlakken

Op deze bladzij zie je vijf plaatjes van veelvlakken en staafjesmodellen van die veelvlakken. Welk staafjesmodel hoort bij welk veelvlak?

veelvlak	1	2	3	4	5
staafjesmodel					

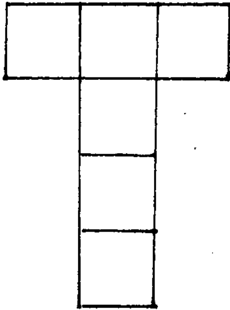


● Werkblad ●

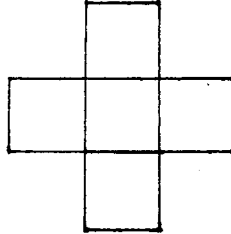
▶ Bouwplaat of niet?

Onderzoek of de volgende uitslagen bij een ruimtefiguur horen. Schrijf – als die er is – de naam van het lichaam erbij.

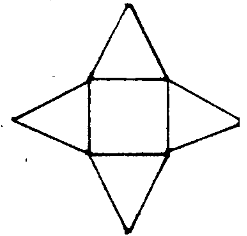
1



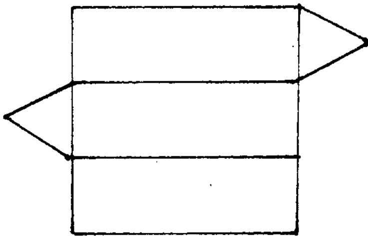
2



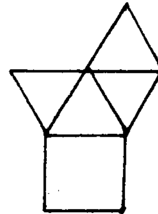
3



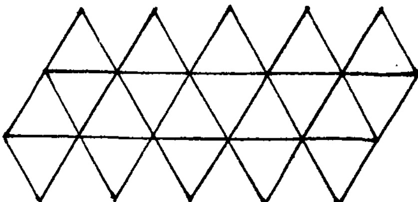
4



5



6



● Verenigingsnieuws ●



Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

▶ Jaarrede 1991

Op 14 september 1991 werd het Freudenthal instituut geopend. Met de viering van het tien-jarig bestaan van de vakgroep OW & OC werd aan hun instituut de naam gegeven van ons oud-erelid prof. dr. Hans Freudenthal. Wij zijn verheugd over het feit dat zijn naam zal voortleven o.a. via een instituut dat belangrijk werk verricht voor het wiskundeonderwijs.
Freudenthal heeft een belangrijk deel van zijn leven gewijd aan het stimuleren van de verbetering van het wiskundeonderwijs in zowel lager- als middelbaar- als hoger-onderwijs. In zijn laatste boek 'Revisiting Mathematics Education' merkt hij op dat niet alleen inzichtelijke introducties belangrijk zijn maar dat het zelfs cruciaal is te zorgen voor het behoud van het inzicht. Dit zou, aldus Freudenthal, ernstig in gevaar gebracht kunnen worden door een te ver doorgevoerde training. Leerlingen moeten zich bewust worden van hun eigen leerproces en nadenken over hun intuïties daarbij. Het testen van inzicht moet origineel genoeg zijn om te voorkomen dat alleen aangeleerde trucs succes opleveren. Bij het drastisch moderniseren van traditioneel wiskundeonderwijs moet men rekening houden met problemen van allerlei aard. Onderwijs in de klas veranderen moet nooit al te snel gebeuren. De vernieuwingen moeten gedragen worden door een zeer groot deel van de onderwijsgevers. De nieuwe stof moet didactisch goed onderbouwd kunnen worden en de aansluiting op het vervolgonderwijs moet redelijk gewaarborgd zijn.

Op de basisscholen is men al geruime tijd bezig met het overgaan van mechanistisch rekenen op realistisch rekenen.
In de bovenbouw van het vwo en het havo is ook al een grote plaats ingeruimd voor realistische, maatschappelijk-georiënteerde wiskunde. De verruiming van ons wiskunde-onderwijs met een stuk realistische wiskunde is als het ware het winnen van een groot stuk land van de zee via het bouwen van een dijk. Er zijn twee delen van de dijk aan weerskanten redelijk klaar. De stukken waren elkaar tot op enige afstand genaderd en het laatste caisson, het COW 12-16 caisson zal binnenkort tussen de twee dijken neergelaten worden. Vele doorlaatopeningen zijn nog open, maar als uitdenkers en uitvoerders goed naar elkaar luisteren dan zullen die een voor een gesloten kunnen worden, zodat een volledige dijk van realistische wiskunde voor 4- tot 19-jarigen gereed zal komen.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is verheugd met de nieuwste voorstellen van het team W 12-16. Hoewel wij altijd achter de doelstellingen van het nieuwe programma hebben gestaan, waren we een jaar geleden niet geheel tevreden met de invulling ervan. De vorig jaar door ons ingestelde werkgroepen hebben uitgebreid gerapporteerd naar aanleiding van de eerste voorstellen. Via onze vertegenwoordigers in de COW, Francis Meester en Joop van Dormolen, zijn de bezwaren doorgegeven aan het team. Mede dankzij deze inbreng zijn er thans veel duidelijkere leerlijnen, is er meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden, is er een duidelijker onderscheid tussen C- en D-stof zichtbaar, is de urenverdeling over de jaren beter aangegeven, is de overlading voor het lbo wat verminderd en is er wat extra stof voor havo-vwo gekomen. In de eerste van de twee bijeenkomsten die de vereniging dit jaar wederom organiseert, hebben velen al kunnen zien en horen hoe de voorstellen verbeterd zijn en hoe het straks als auteurs boeken op de markt brengen, mogelijk moet zijn om op meerdere niveaus te werken.

Graag memoreer ik hier ook nog het vele werk dat de VALO verricht bij alle activiteiten rond de verspreiding van, en de discussie over, de nieuwe leerplannen.

Mede dankzij sterke aandrang van het bestuur op het ministerie is er toch nog een kleine portie geld beschikbaar gekomen om de experimenten op de C-scholen doorgang te laten vinden.
De kwaliteit van de contextrijke examenopgaven van de experimenterende lbo-mavo-scholen, alsmede de door de leerlingen geboekte resultaten, geven ons het vertrouwen dat men op de goede weg is.

Contextrijke wiskunde betekent voor veel leerlingen dat ze meer interesse en plezier in het vak zullen krijgen, aangezien het nut van hetgeen ze moeten doen veel duidelijker is. Wij zullen in de praktijk er wel voor moeten waken dat we niet over een poosje allemaal leerlingen krijgen die weliswaar goed met contexten overweg kunnen, maar die zich geen raad weten met de simpelste berekeningen die voortvloeien uit de wiskunde die tevoorschijn komt, na het uitrafelen van de teksten. Dan is het paard achter de wagen gespannen!

Volgend jaar zal de vereniging een advies aan het ministerie moeten uitbrengen over het eindrapport van de COW. In grote trekken ziet het ernaar uit dat wij positief zullen kunnen reageren, maar uiteraard moeten onze leden het bestuur duidelijk maken of wij als vereniging nog op veranderingen moeten aandringen.

Nieuwe programma's eisen ook nieuwe toetsen en waarschijnlijk nieuwe toetsvormen. Programma's geven geen uitsluitsel over de diepgang waarmee les gegeven wordt. Elke docent of sectie kan binnen bepaalde grenzen zelf vaststellen wat geëist moet worden.

Bij centrale examens zijn wij van mening dat een tweede correctie noodzakelijk is in het belang van objectieve beoordelingen van alle kandidaten op een examen. Bij examens waarin opgaven met contexten voorkomen is gebleken dat de beoordeling nog meer moeite kost dan bij traditioneel werk. Daarom lijkt een tweede correctie ons essentieel om zoveel mogelijk eenheid in de beoordeling te krijgen. Een bijkomend voordeel van een tweede correctie is de mogelijkheid om via het contact met een tweede corrector, niveau en werkwijze op een andere school te leren kennen.

Wij hopen over allerlei toetsen en toetsvormen vandaag meer te leren.

De 22 volgscholen in het HAWEX-experiment hebben in het afgelopen jaar hun eerste examens havo-A en havo-B gehad. De resultaten waren zeker bevredigend te noemen.
Bij wiskunde-A bleek dat de op de realiteit berustende vraagstukken voldoende wiskundige vaardigheden vereisen en voor een brede groep leerlingen haalbaar zijn. Deze meer aansprekende wiskunde zal hopelijk zorgen voor minder afhakers in het havo en door de maatschappelijke relevantie ook meer plezier in het werken opleveren.
Het havo wiskunde-B examen was redelijk pittig maar is toch ook vrij goed gemaakt. Het ziet er naar uit dat dit vak een betere aansluiting zal geven op technische vervolgopleidingen.
In verband met veel gesignaleerde problemen bij de nieuwe havo-wiskunde heeft de NVvW in Rotterdam een proefbijeenkomst gehouden om havodocenten in de gelegenheid te stellen om van gedachten te wisselen over de nieuwe boeken en om proefwerken met elkaar te ruilen. Dit is zo nuttig gebleken dat we dit jaar in 5 verschillende steden wederom een dergelijke bijeenkomst zullen organiseren. U hebt daarover al kunnen lezen in Euclides 1 en 2 van de huidige jaargang.

De Werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde-A (de WIEWA) heeft het rapport over de onderdelen kansrekening en statistiek al enige tijd geleden afgerond. Het bestuur heeft na zeer lang aandringen eindelijk de kans gekregen om o.a. hierover een gesprek te hebben op het ministerie.
Met hulp van o.a. prof. V.d. Craats van de vaksectie wiskunde havo/vwo van de CEVO, inspecteur W. Kleijne en de ons al enige tijd adviserende vakstatisticus dr. Van Putten is het met veel moeite gelukt om het rapport via Uitleg bij alle scholen te krijgen. De toelichting bij Correlatie en Regressie, van belang omdat in het Centraal Examen wiskunde-A in 1992 voor het eerst dit onderwerp gevraagd kan worden, zal pas in Uitleg kunnen verschijnen als de WIEWA met het rapport over de resterende onderwerpen – toegepaste analyse en algebra – gereed is. Daarom hebben wij ervoor gezorgd dat u

●

het deelrapport over correlatie en regressie vandaag gratis mee kunt nemen.
In ons gesprek op het ministerie is ook door ons de dringende noodzaak aangekaart om het examenprogramma wiskunde-B vwo te herzien. Niet alleen is dit programma zeer overladen, het is ook aan vernieuwing toe, gezien de grote technische vooruitgang met de graphic calculator en de computeralgebra. Moet men zich immers, gezien de mogelijkheid van telefoon en fax niet afvragen of berichten nog wel per koerier te paard moeten worden doorgegeven! Het ministerie heeft elke hulp in deze geweigerd, gezien de plannen van de staatssecretaris met de profilering van de bovenbouw van havo en vwo. Wij zijn bang dat hierdoor een lang uitstel komt van noodzakelijke veranderingen. Aanvragen voor onderzoeken naar graphic calculator en computer-algebra zijn door het bestuur ondersteund en zullen vermoedelijk snel op gang komen.

De voorstellen van de Projectgroep Invoering Nieuwe Technologieën (PRINT) zijn naar aanleiding van een verzoek van het bestuur, op de vorige jaarvergadering gedaan, door een aantal leden onderzocht. Naar aanleiding hiervan heeft het bestuur het voorstel van PRINT aan het ministerie, om te komen tot vervanging van het keuzeonderwerp bij wiskunde-A vwo door een vast onderdeel Automatische Gegevens Verwerking, gedeeltelijk ondersteund. Wij staan positief tegenover de mogelijkheid dat scholen het onderdeel A.G.V. kunnen kiezen, maar wij hebben bedenkingen t.a.v. de verplichting voor scholen om het te moeten geven. Het lijkt ons een grote taakverzwaring voor vele docenten, zeker om hiervoor regelmatig originele schoolonderzoeken te moeten maken, maar bovendien zien wij op sommige scholen problemen ontstaan i.v.m. het aantal beschikbare computers. De vraag is verder of er in de eerstkomende jaren niet weer grote technische ontwikkelingen te verwachten zijn.

In 1990 schreven NVORWO (de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en Wiskunde-Onderwijs) en de NVvW een prijsvraag uit 'Anders dan anders', voor het ontwerpen van geconcretiseerd lesmateriaal in enigerlei bereik van het reguliere wiskunde-onderwijs. Een jury, bestaande uit prof. V.d. Blij, dr. Van Dormolen, prof. Goffree en mevr. Verhoef hebben de inzendingen bestudeerd en een voorstel gedaan voor de toekenning van prijzen. Deze gingen naar J. Gademan voor de inzending 'parkeervoorzieningen voor personenauto's' en naar J. Hofmeester voor de inzending 'de stad Assen'. De prijzen zijn uitgereikt door ons erelid Joop van Dormolen tijdens de jaarvergadering van de NVORWO. Bij deze wil ik de prijswinnaars nogmaals hartelijk feliciteren. Alle inzenders en uiteraard alle juryleden willen we hier nog eens bedanken voor het vele werk dat zij verricht hebben.
De beide verenigingen zijn van plan wederom zo'n soort prijsvraag uit te schrijven maar dan met duidelijk omschreven onderwerpen. Ten zeerste hopen wij dat er dan veel meer inzendingen zullen komen.

Helaas zijn er meningsverschillen tussen het bestuur en de redactie van Euclides betreffende algemene beleidszaken geweest. Bij de redactie was er weinig duidelijkheid over de manier waarop het bestuur reageerde op allerlei ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. De redactie was verder van mening dat de vereniging zich vrijwel geheel moest bezig houden met zaken die docenten in de tweede graads-sector bezig houden. Het bestuur daarentegen is de mening toegedaan dat de NVvW er is voor alle wiskundeleraren en dat hoogstens tijdelijk een speciale groep extra veel aandacht mag opeisen. Deze beleidszaak o.a. heeft tot gevolg gehad dat de voorzitter van de redactie Auke Oosten en de secretaris Pieter de Roest uit de redactie gestapt zijn. Ze hebben beiden jarenlang veel werk voor het tijdschrift verricht en wij willen hen daar bij dezen nog heel hartelijk voor bedanken.
Agnes Verweij heeft het werk van eindredacteur overgedragen aan Ynske Schuringa-Schogt. Als voorzitter hebben we de ervaren oud-hoofdredacteur Bert Zwaneveld aan mogen stellen. Wij zijn de nieuwe redactieleden erg dankbaar voor het feit dat ze bereid zijn gevonden de zware, veel tijd vereisende functies op zich te nemen. Agnes blijft in de

redactie en gelukkig heeft ook Pieter de Roest, omdat voor hem nog geen opvolger te vinden was, zich bereid verklaard nog hulp te blijven bieden. Inmiddels zijn er gesprekken geweest tussen de kernredactie en een delegatie van het bestuur om de zakelijke verschillen uit de weg te ruimen.

Zoals u weet heeft de NVvW een leesportefeuille met veel didactische buitenlandse tijdschriften. Als service voor onze leden zijn wij geabonneerd en worden de tijdschriften gedurende enige weken aan leden, die zich daar voor opgeven, ter inzage gestuurd. Helaas is de belangstelling voor de leesportefeuille sterk gedaald. Het bestuur heeft besloten nog een jaar te kijken of de belangstelling weer voldoende stijgt en anders deze kostbare dienstverlening te staken.

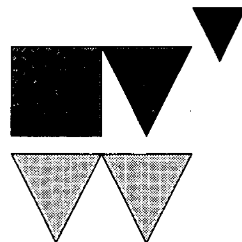
Steeds meer vakinhoudelijke verenigingen hebben behoefte aan directere contacten met elkaar en met het ministerie. Belangrijke zaken, het onderwijs betreffende, moeten sneller en efficiënter met het ministerie besproken kunnen worden. Tot nu toe liepen de contacten vreselijk moeizaam. Via de Bèta-federatie is er een platform van Natuurwetenschappelijke verenigingen en via het VVVO is er een platvorm van Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs waar de NVvW in participeert. Via de platforms zal getracht worden regelmatig contact te hebben met top-ambtenaren op het ministerie.

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft in het afgelopen jaar twee landelijke dagen georganiseerd. Vooral de studiedag over carrièreplanning, die ook veel belangstelling van niet-leden trok, was zeer geslaagd. Er is een nieuwe poster uitgegeven. Intussen is men druk bezig met de voorbereidingen van het tweede lustrum dat in maart 1992 gevierd zal worden, en dat de voorlopige titel heeft:
'Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk'.

Goed onderwijs is meer dan examentraining alleen. Overal om ons heen zijn er dingen en gebeuren er dingen die vragen om een wiskundig onderzoek. Deze soms voor ieder mens noodzakelijke wiskunde, behoort ook een plaatsje in ons onderwijs te krijgen. Het zou fijn zijn als in elk geval deze wiskunde zo gegeven zou kunnen worden dat alle leerlingen wiskunde als een plezierige uitdaging gaan beleven. De nieuwe programma's voor lbo en mavo zullen hopelijk ervoor gaan zorgen dat er een groter percentage leerlingen wiskunde als een zeer zinvol vak gaat ervaren en in hun examenpakket zal kiezen.

De Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap biedt ons de helpende hand op drie bijzondere manieren:
steun bij de uitgave van het tijdschrift Pythagoras, de Wiskunde Olympiade en de Wiskunde A-lympiade, allemaal bedoeld om meer belangstelling voor wiskundige activiteiten te ontwikkelen.

De NVvW zal examenbesprekingen, hoorzittingen en voorlichtingsbijeenkomsten blijven organiseren voor zoveel mogelijk wiskundedocenten. Wij zullen kritisch alle veranderingen blijven volgen want de vereniging wil waar mogelijk een onafhankelijk oordeel kunnen uitbrengen over alles wat de wiskundedocenten aangaat. Wij hebben als bestuur hierbij de hulp van de leden nodig en ik roep u dan ook op uw deskundigheid in te zetten om via commissies, werkgroepen, artikelen in Euclides of gewoon door het geven van informatie, de vereniging te steunen. De NVvW kan zo uitgroeien tot een vereniging die de duidelijke taakverzwaring van de docenten binnen de perken kan houden en die de leerstof die behandeld moet worden mede kan blijven bepalen.
Gaarne hoop ik dat iedereen mee wil werken om in alle sectoren nieuwe leden voor onze vereniging te werven.



▶ Notulen jaarvergadering 1991

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 26 oktober 1991 in het gebouw van het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om 10.11 uur opent de voorzitter, dr. J. van Lint de vergadering. Hij verwelkomt alle aanwezigen en in het bijzonder de ereleden prof. dr. F. van der Blij, dr. J. van Dormolen en dr. Th. Korthagen, de inspecteurs drs. W. Kleijne en dr. J. Vedder, de voorzitter van de NVORWO E. Wijdeveld, de redactie van Euclides, de aanwezige uitgevers en de organisatoren mevr. M. Abels, ir. H. v.d. Kooij, prof. dr. J. de Lange en de medewerkers aan de studiedag.
Vervolgens spreekt de voorzitter de jaarrede uit.
Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 27 oktober 1990 en de jaarverslagen goedgekeurd. De voorzitter deelt mede dat de heer T. Vandeberg door ziekte verhinderd was zijn taak in de kascommissie te vervullen. Mevrouw drs. H. Verhage is bereid gevonden de heer Vandeberg in de kascommissie te vervangen. Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen, waarna de penningmeester wordt gedechargeerd met dank voor het vele verrichte werk. Daar er geen tegenkandidaten zijn, worden zonder stemming in de kascommissie benoemd mevr. drs. Th. J. de Poel uit Amsterdam en de heer R. van Oord uit Waddinxveen.
De voorzitter gaat hierna over tot de bestuursverkiezing. Aftredend zijn mevrouw M. Meeder en de heren F. F. J. Gaillard en dr. J. van Lint. Daar zowel mevrouw Meeder als de heer Gaillard zich niet herkiesbaar hebben gesteld, heeft het bestuur mevrouw drs. M. P. Kollenveld en de heren drs. S. M. P. Garst en dr. J. van Lint kandidaat gesteld. Er zijn geen tegenkandidaten zodat de voorgestelde kandidaten worden verkozen.
Vervolgens neemt de voorzitter afscheid van de afgetreden bestuursleden. Mevrouw Meeder heeft drie jaren in het bestuur gezeten. Zij vond de combinatie van werk voor de COW en het bestuurslidmaatschap van de NVvW moeilijk. Het bestuur van de NVvW stelde haar mening altijd bijzonder op prijs omdat zij steeds precies aangaf welke koers de vereniging moest gaan en betreurt het daarom dat zij voor vertrek uit het bestuur heeft gekozen.
De heer Gaillard neemt eigenlijk geen afscheid want hij blijft met vele administratieve zaken helpen. Als bestuurslid werd de verantwoordelijkheid voor al het werk te veel voor hem. Hij was niet alleen de penningmeester, maar ook het draaiboek, de ledenadministratie en het geheugen van de NVvW. De voorzitter dankt beiden hartelijk voor alles wat zij voor de vereniging hebben gedaan.
Het volgende agendapunt is de contributie voor het jaar 1992/1993. Deze wordt wederom vastgesteld op *f* 55,–.
Hierna vraagt de voorzitter nog aandacht voor de uitgereikte evaluatieformulieren en verzoekt deze aan het einde van de dag in te leveren. Ook deelt hij mede dat de certificaten aan het einde van de dag in ontvangst genomen kunnen worden.
Tot slot dankt de heer Gaillard voor de vriendelijke woorden die tot hem gericht zijn en doet enige mededelingen over de lunch die milieuvriendelijker geregeld is dan vorig jaar.

Na het ochtendgedeelte van de jaarvergadering geeft de voorzitter het woord aan de heer Van der Kooij om de studiedag in te leiden.
Na de studiedag volgt het middaggedeelte van de jaarvergadering. Dit gedeelte bestaat uit de rondvraag.

De heer Van Dormolen stelt als eerste een drietal vragen:
Bij het bekijken van de financiële verslagen valt het op dat het Fonds Eigen Publikaties een hoog saldo heeft. Dit geld is door auteurs aan de vereniging geschonken om te gebruiken. Hij vraagt hoe het bestuur denkt dit geld te gebruiken.
Tot nu toe wordt op de mavo en het lbo het eindexamen gedeeltelijk in meerkeuzevorm afgenomen. Kan het bestuur zich inzetten om te voorkomen dat ook bij W12-16 met meerkeuzevragen geëxamineerd gaat worden?
Binnen de wiskunde rijzen regelmatig problemen over ‘taal’. Is het mogelijk hier volgend jaar de studiedag aan te wijden?

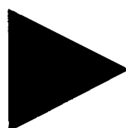
De voorzitter is er gelukkig mee dat het Fonds bestaat. Het bestuur wil dit niet voor gewone uitgaven gebruiken, maar alleen voor extra's, zoals een special van Euclides, subsidie voor bezoekers aan ICME-congressen, het Vademecum, de prijsvraag van de NVvW en de NVORWO. Ook andere suggesties van leden zijn van harte welkom. Meerkeuzevragen op de nieuwe examens W12-16 moeten we trachten te voorkomen en het bestuur zal hiervoor strijden. Het voorstel voor de studiedag 1992 zal in het bestuur aan de orde komen; misschien zijn er nog meer suggesties via de evaluatieformulieren.

De heer J. B. van der Groep is als schooldecaan geïnteresseerd in datgene wat er na de middelbare school gebeurt. Hoe is de aansluiting van havo naar hbo? Is deze aansluiting door de nieuwe wiskundeprogramma's beter geworden?
De voorzitter wijst er op dat er bij de invoering van Hewet het eerste jaar klachten waren bij het hierop nog niet ingespeelde tertiair onderwijs doch dat er daarna veel positieve geluiden gehoord zijn. Over Hawex is nog weinig bekend. De secretaris voegt hieraan toe dat de HBO-raad werkt aan instroomprofielen en dat men in werkgroepen de aansluitingsproblematiek wil onderzoeken.

De heer A. Pach is de volgende vragensteller met enige vragen over Correlatie en Regressie op het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde A vwo. Wat is de status van de paragraaf Correlatie en Regressie in het Wiewa-deelrapport? Komen er voorbeeldopgaven over Correlatie en Regressie? Zullen de leerlingen veel voordeel hebben van rekenmachines waarmee covariantie berekend kan worden? Hoeveel jaar blijft Correlatie en Regressie op het eindexamen en verdwijnt het weer als AGV als keuzeonderwerp wordt toegestaan?
De heer J. Breeman antwoordt dat het deelrapport Correlatie en Regressie pas officieel wordt als het in Uitleg verschijnt, maar dat de samenstelling van de Wiewa en de nauwe contacten met de Cevo er wel garant voor staan dat de Cevo zich aan het deelrapport zal houden. Er komen geen nieuwe voorbeeldopgaven zodat men moet werken met de opgaven uit de verenigingsbundel wiskunde A vwo en de boekjes van de uitgevers. In de lijst van eisen aan rekenmachines van het ministerie komt covariantie niet voor. In vraagstukken op het examen zal men dus uitgaan van rekenmachines zonder toets voor covariantie. Het advies van de vereniging over de PRINT-voorstellen komt in het decembernummer van Euclides. Het bestuur heeft voorgesteld de keuze tussen Correlatie en Regressie en AGV op relationele bestanden open te houden.

Als laatste vraagt mevr. Verhage het woord. Zij dankt namens de werkgroep Vrouwen en Wiskunde de heer Gaillard voor het vele dat hij voor hen heeft gedaan. Juist door haar werk in de kascommissie heeft ze gezien hoeveel werk de heer Gaillard gedaan heeft en hoeveel er in de vereniging omgaat. Zij onderstreept de dank met bloemen. De heer Gaillard dankt voor deze vriendelijke woorden.

Aan het eind van de rondvraag dankt de voorzitter de leiders van de werkgroepen en in het bijzonder de organisatoren voor de geslaagde studiedag. Hij dankt de heer en mevrouw Gaillard voor de goede organisatie van de dag en conciërges, huishoudelijke dienst en schoolleiding van het Nieuwe Lyceum voor de goede verzorging en de verleende gastvrijheid.
Hierna sluit hij om 16.42 uur de jaarvergadering.



Mededeling

De grafische zakrekenmachine in het wiskunde-onderwijs

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft op donderdag 26 maart 1992 van 16.00-18.00 uur een regionale (proef)-bijeenkomst 'De grafische zakrekenmachine in het wiskunde-onderwijs' gepland te Eindhoven.
De bijeenkomst wordt gehouden in de Pedagogisch Technische Hogeschool op het terrein van de TUE, het Eeuwsel 2.
De bijeenkomst is bedoeld voor wiskundedocenten aan havo/vwo en andere belangstellenden.
De bijeenkomst is gratis voor leden van de vereniging; van niet-leden wordt een bijdrage in de kosten van *f* 15,– gevraagd.
Aanmelding kan geschieden door middel van een formulier dat naar de scholen in de regio is gestuurd.
Wie geen formulier heeft, kan er een aanvragen bij de ledenadministratie van de vereniging: 076-65 32 18.

● Verenigingsnieuws ●



Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

▶ HAWEX-uitwisselingsbijeenkomsten november 1991

Jan Breeman

De door de vereniging georganiseerde bijeenkomsten bleken duidelijk in een behoefte te voorzien. De bijeenkomsten in Amsterdam en Eindhoven werden het drukst bezocht. Toch waren die in Zwolle, Groningen en Arnhem ook zeer geanimeerd. Het ruilen van proefwerken en schoolonderzoeken was voor velen zo belangrijk dat het tweede kopje koffie er vaak bij inschoot. Een aantal opvallende zaken uit de discussies willen we hier nog wat aandacht geven.

Havo A

Vooral de didactiek van wiskunde A blijkt de nodige problemen te geven. In de groepen treft men vaak gigantische verschillen aan in zowel leesvaardigheid, rekenvaardigheid als zelfstandigheid (werkhouding). De algemene kennis die voor het begrijpen van de diverse contexten nodig is, blijkt nogal eens tegen te vallen. Globaal genomen vinden de leerlingen het programma leuk; voor doubleurs (oud-programma) gaat een nieuwe wereld open, ze zeggen: 'Nu begrijp ik pas wat ik bij wiskunde doe en waarom ik hèt doe!' Leerlingen en docenten hebben nog wel moeite met vragen die geen eenduidig antwoord hebben. Er werd opgemerkt dat de volledigheid van argumentatie in dat soort situaties van groot belang is. De volgorde van de onderwerpen in de boeken vindt men soms erg ongelukkig. Het blijkt in zo'n eerste jaar ook erg moeilijk om van tevoren het juiste niveau voor de toetsen in te schatten. Daarbij is met name het zicht krijgen op de omvang en de gecompliceerdheid die de contexten mogen hebben, een probleem. Bovendien blijkt het vinden van goede contexten een uiterst tijdrovende bezigheid te zijn. Het onderhouden van de rekenvaardigheid en het goed leren hanteren van de rekenmachine vindt men zeer belangrijk. De computer wordt over het algemeen weinig ingeschakeld. Sommigen menen dat er nog weinig goede software op de markt is. Daardoor zou het nuttig effect onvoldoende zijn. Ook is het computerlokaal niet altijd op het juiste moment beschikbaar. De ervaringen met het onderwerp kansrekening geven grote zorg. Andere onderwerpen kunnen vaak zelfstandig door de leerlingen worden doorgewerkt. Bij het onderwerp kansrekening lukt dit niet. De repetities over dit onderwerp blijken nogal eens mis te gaan. Iemand sprak de hoop uit dat de kansrekening niet de 'gonio' van wiskunde A zal worden, *de som die er altijd in moest en ook altijd slecht gemaakt werd.*

Havo B

De stap van 3 havo naar 4 havo B is op de meeste scholen uitermate groot. Ondanks het feit dat tot dusver te weinig meetkunde in de onderbouw aan bod is gekomen en dus meer tijd in algebra is gestoken, blijkt de rekenvaardigheid van de leerlingen erg tekort te schieten. Iemand sprak zijn zorg uit voor de toekomst: na de invoering van de nieuwe wiskundeprogramma's in de onderbouw wordt er winst geboekt op het gebied van de meetkunde, maar het kunnen omgaan met algebraïsche abstracties zou wel eens beduidend minder kunnen zijn dan nu al het geval is. Vergeleken met het oude havo-programma vindt men het nieuwe programma een grote vooruitgang. Wel is het gevoel algemeen dat er nu toch wel erg hoge eisen gesteld worden. Daarbij is men bang dat de leerboeken niet het peil hebben van het examen. De angst het

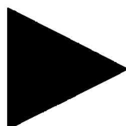
programma niet op tijd af te hebben, is voor velen een reden om af te zien van het gebruik van de computer in de les. De beschrijving over de onderwerpen die voorlopig niet op het examen aan de orde zullen komen, vindt men niet erg duidelijk. Komen doorsneden nou helemaal niet in het examen?[1])

Tot slot

Op enkele bijeenkomsten is globaal nagegaan hoe de verdeling meisjes-jongens voor A en B ligt. De verschillen per school zijn groot. Toch is de algemene tendens dat de meisjes bij A in de meerderheid zijn ($\approx$ 60%) en bij B flink in de minderheid ($\approx$ 30%). Omdat B doorgaans gekoppeld is aan het vak natuurkunde (sommigen waarschuwen nadrukkelijk om wiskunde B niet als enige exacte vak in het pakket op te nemen) bevreemdt dit laatste niet. Toch wordt meer dan vroeger aan het eind van 3 havo beslist of een technische vervolgopleiding tot de latere mogelijkheden behoort.
Hoewel de havo niet bedoeld is als vooropleiding voor het vwo blijkt in de praktijk dat nogal wat leerlingen na de havo doorstromen naar het atheneum. Men betreurt daarom de slechte aansluiting van havo A met vwo A en vindt het onjuist om van de wiskundedocent te verlangen de hiaten bij deze doorstromers door extra begeleiding weg te werken.
De vraag 'Moet deze bijeenkomst herhaald worden?' werd overal bevestigend beantwoord. Op meerdere bijeenkomsten werd gesuggereerd: eerst het examen eens bekijken en dan eind september 1992 weer regionaal bijeenkomen. Doen we!

Noot

1 Navraag leverde het volgende op:
Bij het aanbrengen van ruimtelijk inzicht is het vrijwel onmogelijk om voorbij te gaan aan het begrip doorsnede. Immers, op het moment dat in bijvoorbeeld een kubus een diagonaalvlak wordt getekend, kan men spreken over een doorsnede. De leerlingen zullen met dit soort triviale situaties geen moeite (mogen) hebben. Buiten het examen zullen die problemen worden gehouden waarin je 'echt' moet zoeken naar een doorsnede. Zeker die problemen waarin het vinden van de doorsnede pas lukt als eerst een hulpconstructie is uitgevoerd.



Mededeling

Examenoproep Staatsexamen wiskunde m.o.-A of wiskunde m.o.-B

De minister van onderwijs en wetenschappen,

Maakt aan belanghebbenden bekend dat degenen die in 1992 willen deelnemen aan het staatsexamen wiskunde m.o.-A of wiskunde m.o.-B, af te nemen door de Algemene Examencommissie zich vóór 1 mei 1992 dienen aan te melden – uitsluitend door middel van een briefkaart – bij de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde m.o., de heer prof. dr. A. W. Grootendorst, Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, met vermelding van de volledige naam en het adres van de kandidaat en met nauwkeurige vermelding van de onderdelen die de kandidaat wenst af te leggen. Na 1 mei 1992 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.

Het schriftelijke gedeelte van het examen (zowel A als B) wordt afgenomen op donderdag 27 en vrijdag 28 augustus 1992.

De kandidaten worden geëxamineerd volgens het programma, zoals omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor wiskunde' jaargang 63, aflevering 2, november 1975, blz. 86-93. Men kan dit programma verkrijgen door storting van *f* 3,50 op girorekening 172007 t.n.v. de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde m.o. te Den Haag onder vermelding van: Examenprogramma A (respectievelijk B).

Informatie verkrijgbaar bij:
ED/ST, mw. M. de Jong tel. 050-292739

(Overgenomen uit
Uitleg O en W-regelingen nr. 1 15 januari 1992)

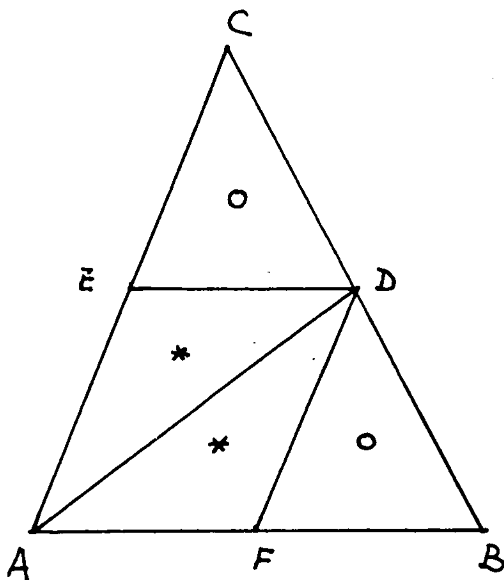
● Bijdrage ●

▶ Ter verheldering

Piet Verstappen

Bij mijn kort commentaar en bitse afkeuring van enkele voorbeeldvraagstukken verwachtte ik dat lezers erop zouden reageren. Inderdaad, vier docenten van de Hogeschool Holland hebben mijn stukje grondig gelezen en denken dat er meer zit achter mijn kritiek op enkele (let wel niet *de*) doorkijkjes.[1] Ze hebben gelijk, er zit meer achter. Mijn, wel erg cryptische aanmerkingen drukken een ongenoegen uit over een bepaalde opvatting van wiskundeonderwijs, niet alleen in Amerika, waar mijn beschouwing over ging, maar ook in Nederland.
Wiskunde eist een groot aantal uren op van het funderend onderwijs. Daar heb ik niets tegen, integendeel, mits tegenover de leerplicht voor wiskunde een leerrecht staat, dat wil zeggen dat de jonge mens recht heeft op uitgebalanceerde zinvolle stof en beproefde methoden. Als leerlingen qua methodiek het bos in worden gestuurd of worden beziggehouden met opdrachten die niets extra's bieden of zo pietluttig zijn dat de te besteden tijd en inspanning niet opwegen tegen het nut ervan, dan wordt aan dit recht afbreuk gedaan.

Wat is wiskunde? Deze vraag is stellig moeilijk te beantwoorden, hoewel er velen zijn die zich erover gebogen hebben. Nog moeilijker is de vraag: wat is wiskunde voor jongeren? Dit is niet louter een essentievraag, want de achtergedachte is meestal de betekenis en het pragmatisch nut van het vak. Het meest gegeven antwoord is waarschijnlijk: wiskunde is dienstig voor de ontwikkeling van het denken en aldus behoort wiskunde tot de realia. Bovendien is van wiskunde te genieten door de esthetische waarde ervan. Elegantie, schoonheid, symmetrie en dergelijke werken motiverend. Zelf ben ik door de esthetica steeds gecharmeerd geweest. Ik herinner me hoe verbaasd ik was over de Eulerlijn in een driehoek, waarop het hoogtepunt, het zwaartepunt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel en het middelpunt van de negenpuntscirkel in een harmonische verhouding liggen. Voortdurende verbazing is wat vele wiskundigen beweegt. De esthetische waarde is geen voldoende argument voor de leerplicht en dat brengt me op het tweede criterium, de toepassingswaarde van wiskunde. Naast de ontwikkeling voor het denken moet de wiskunde toepasbaar zijn.
In strikte zin is toepassing inherent aan wiskunde, want in wezen is de gehele wiskunde een toepassing van het algemene op het bijzondere. Dit werd al ingezien door grote filosofen als Plato en veel later Leibniz en Kant. Het bijzondere hoeft niet concreet te zijn. Laat ik een eenvoudig voorbeeld geven. Men trekt een zwaartelijn in een driehoek en wil bewijzen dat de oppervlakten van de deeldriehoeken gelijk zijn. Daartoe trekt men twee hulplijnen door het voetpunt van de zwaartelijn evenwijdig met de twee zijden van de driehoek. Er zijn dan vier driehoeken twee aan twee congruent, die dus de oppervlakten o en * hebben. Nu bestaat elk van de deeldriehoeken uit één o en één * en daarmee is het bewijs voltooid (figuur 1).
Daar niets is gezegd over de aard van de driehoek geldt de stelling dat de zwaartelijn de driehoek qua oppervlakte doormidden deelt voor elke driehoek. Dit algemene wordt dan direct toegepast op de bijzondere driehoek ADC, zodat o = * en daarmee is de stelling bewezen dat de vier deeldriehoeken gelijke oppervlakten hebben.
Kortweg, wiskunde bestaat uit algemene redeneerketens, partieel geordend, die elk als model kunnen dienen voor concrete verbanden. Bij toepasbaarheid in enge zin heeft men gewoonlijk op het oog dat de objecten en activiteiten van de wiskunde modellen zijn van reële dingen en processen en liefst van de alledaagse realiteit als men het over jongeren heeft.



Figuur 1

Veel van de huidige schoolwiskunde voldoet nauwelijks aan de eisen: esthetisch en toepassing van het algemene. Zo werd ik kribbig bij: 'een boek wordt willekeurig opengeslagen. Het produkt van de paginanummers is 3192. Bij welke pagina's is het boek opengeslagen?' Ik zei dat het vraagstuk onrealistisch en gekunsteld is. Een analoge vraag: Het produkt van twee opeenvolgende natuurlijke getallen is 3192, welke zijn die getallen?, behoort wel tot de esthetische wiskunde en er bestaan leuke toepassingen van. Maar bij de toepassing op een boek slaan de stoppen door. Bent u ooit iemand in het dagelijks leven tegengekomen met zo'n probleem? Wat moeten de leerlingen niet denken van dergelijke 'wiskunde'! Wiskundigen doen gekke dingen als het vermenigvuldigen van paginanummers en vragen aan ons zoiets op te lossen. Trouwens ook voor toegepast wiskundigen is het produkt van telgetallen, want dat zijn paginanummers, onzin.
Er zijn zeker aardige toepassingen van wiskunde op een boek, zoals het eenvoudige: welke pagina's ontbreken of iets moeilijker: welke pagina's zitten in de boekkaternen, of het pittige: alle 206 pagina's liggen door elkaar, zoek de snelste manier om ze in de juiste volgorde te leggen. Bij het laatste probleem mag men best vraagtekens plaatsen. Niet wegens de relevantie, want sorteren is stellig een relevante activiteit, maar dat alle pagina's van een boek door elkaar liggen komt niet vaak voor. Voor de handigste manier van sorteren moet men een andere context zoeken. Niet alles wat reëel is is geschikt. Vereist is een zekere frequentie.

Het tweede voorbeeld: zoek alle waarden van x waarvoor
$(x^2 - x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$, voldoet ook niet aan mijn eisen, het is wel algemeen doch niet toepasbaar. Ik kan naar beste weten geen enkele situatie bedenken waarvan deze vergelijking een model is. De critici weten vast ook geen voorbeeld, maar ze hebben een ander argument voor een dergelijk vraagstuk. Het is, vinden ze, een mooi toetsvraagstuk. Tot mijn schande moet ik bekennen dat ik zulke verwikkelde opgaven vroeger ook stelde. Dan kun je pas zien of iemand de stof goed begrepen heeft, dacht ik, niet beseffend dat ik meer intelligentie testte dan inzicht en vaardigheid in het onderwezene. Het verschil tussen 'aptitude tests' en 'achievement tests' was me toen niet duidelijk. Het zijn van die strikvragen waar zelfs ervaren wiskundigen intrappen. Heb je eraan gedacht dat een macht 1 kan zijn als de exponent 0 is, mits..., of als het grondtal 1 is en dan zie je over het hoofd dat het grondtal ook een eenheidswortel kan zijn, mits... In dit geval -1 met een even exponent. De vergelijking vergt een mengelmoes van existentieel en constructief denken.

Didactisch en wiskundig onverantwoord vind ik inderdaad ¾ van 18. De mengelmoes van wiskundetaal en gewone taal geeft louter verwarring, met alle complicaties vandien. Allereerst de alledaagse taal zelf is dubbelzinnig. Zelfs positivisten wilden dan ook de gewone taal opschonen om tot een wetenschappelijke taal te komen. Zo ook 'van'. ¾ van 18 kan evengoed 17¼ zijn als 13½. En in 'drie van de vier' geeft 'van' proportionaliteit aan, zoals in 'drie van de vier mensen slapen op de rechterzijde'. Goed onderwijs staat of valt met juiste formuleringen door de docenten.

Ik begrijp de situatie wel. In het structuralisme is ¾ van 18 een taaluiting, waarbij als model het formele ¾ × 18 kan worden ingeroepen, hetgeen op twee manieren te berekenen is. Ten eerste is ¾ een getal

in statu nascendi. De bewerking delen is nog niet uitgevoerd, net als in $^3\log 4$ het machtsverheffen. Voer de deling uit dat geeft 0,75 en dan het produkt 0,75 × 18 = 13,5. Ten tweede: pas associativiteit op ¾ × 18 toe, dus 3 × 18 : 4 = 54 : 4 = 13,5. De waarheid zit in de wiskunde zelf en er wordt geen beroep op het waarnemen gedaan. ¾ × 18 = 13,5 is algemeen en in talrijke situaties toe te passen. Maar dit toepassen moet geleerd worden.
In het empirisme en realisme ligt de waarheid in de werkelijkheid. Daar getallen in de werkelijkheid niet voorkomen werkt men in het beginonderwijs steeds met dimensiegetallen. Visuele modellen fungeren als toepasbare wiskundigde entiteiten, die de leerlingen steun verlenen bij het denken, omdat ze metaforisch of metonymisch naar de realiteit verwijzen. Zoals ③/4 staat voor vier kinderen om de tafel en drie repen erop of ◕, de kinderwagen, voor drievierde deel van een taart, of ¼ + ¼ + ¼ afgekort 3 × ¼ voor drie glazen van ¼ liter, enzovoort. Het probleem zit in het 'enzovoort', want voor elke nieuwe situatie moet een passend denkmodel uitkomst bieden.
Op zich wind ik me over ¾ van 18 niet op. Wel als ik soms de praktijk bezie. In de 'Professional Standards for Teaching Mathematics', het onderwerp van mijn vorige bijdrage, staat zo'n kijkje in het klassegebeuren. Na een week heeft mevrouw Pizzo de kinderen zover dat ¾ voor hen betekenis heeft, dat wil zeggen ¾ is iets visueels. Een van de kinderen, zeg Fred, vond het een kinderwagen.
Dan staat Fred voor de vraag '¾ van 18'. Een 'kinderwagen van achttien' moet er door zijn hoofdje gaan! Arme Fred, hij begrijpt er niets van. Hij heeft niet de deel-geheel relatie gezien. Voor hem is ¾ iets absoluuts. Een vlakke figuur is het enige waarop Fred kan terugvallen, dat wil zeggen 18, wat voor hem niet aanschouwelijk is, dient hij om te zetten in een maatgetal voor oppervlakken. Zijn denkmodel kan slechts een cirkel van 18 zijn. Echter hoe groot is een cirkel van 18? Dit is een te pittig probleem voor Fred. Stel, Fred zet een kolossale stap door van het reële los te komen en dat hij veronderstelt dat een willekeurige cirkel 18 is, dan komt hij er wellicht uit door 18 te verdelen in 9 + 9 en vervolgens een 9 in 4½ + 4½.
Waarschijnlijk ziet mevrouw Pizzo de moeilijkheid waarvoor ze Fred en anderen geplaatst heeft in, want ze laat ¾ van 18 verder rusten en stelt een wel haalbare vraag: ½ van de 12 potloden in James' doos is gebroken en ⅓ van de 12 potloden in Toms doos. Wie moet er bedroefder zijn en waarom?

Het vierde voorbeeld handelt ook over visuele voorstellingen van wiskundige activiteiten, namelijk de deling 7 : ½. Wiskundig beschouwd is deze deling niets anders dan een inverse vermenigvuldiging ½ × ... = 7, dus de uitkomst is gegeven en een factor is gevraagd. Deze formele kant wenst men niet op te gaan en het antwoord moet uit de waarneming komen. Vandaar de figuur die bestaat uit zeven gelijke vakjes op een lijn en daaronder staan veertien rondjes getekend. Waarvan is deze figuur een representatie? Het wellicht verrassende antwoord: dat hangt van de interpretatie van de beschouwer af. Beschikt de beschouwer over meer mogelijkheden dan heeft hij ook meer interpretaties. De realisten horen dit subjectieve niet graag en wensen een vanzelfsprekende figuur, want, denken ze, er bestaat een alledaagse aanschouwing en die is voor ieder gelijk. Ze vergeten helaas dat mathematiseerbaarheid niet met figuurlijke voorstelbaarheid samenvalt.
In de zeventiende eeuw eiste Leibniz voor de wiskundige axioma's een bewijs, dat wil zeggen een reductie op definities en daarmee op de objectieve inhoud. Hij bemerkte reeds twee verschillende benaderingen en wel via nominale definities en reële definities. Nominaal is bijvoorbeeld een cirkel te bepalen als een vlakke gesloten kromme die een maximale oppervlakte omschrijft en reëel door een passerconstructie, dus alle punten liggen even ver van een gegeven punt. Kant werkte de relatie wiskunde en aanschouwelijkheid verder uit. Hij stelde dat niet alles is terug te voeren op de aanschouwing en hij introduceerde het begrip zuivere (dit is niet empirische) aanschouwing, waarin de constructie meegaat in het bijzondere object. Ik zal hier op abstracte aanschouwing niet verder ingaan, doch volstaan met op te merken dat het didactische gebruik van metaforen begrensd is. Ergens moet een ommezwaai plaats hebben naar de fundamentele methodische wettelijkheid.

In de historie bleek de aftrekking het omslagpunt. Bestaat $2 - 5$ wel? Wie alles op werkelijkheid wil terugvoeren zal hier een mythische beweging moeten verrichten, want de bewerking aftrekken is de metafoor van weghalen of wegnemen. Hoe kun je vijf dingen weghalen als je maar twee dingen bezit? Nu is de mythische uitweg gevonden in het begrip 'tekort', dus door 'negatieve voorwerpen' in te voeren. In plaats van vijf dingen weg te halen voegt men er vijf negatieve dingen aan toe $(2 + -5)$. Het dilemma is daamee enkel verlegd naar het verschil tussen het negatieve getal en aftrekken. In ieder geval met het vermenigvuldigen van negatieve getallen is het spel echt uit. Dat $-1 \times -1 = 1$ is niet meer met iets werkelijks aan te tonen. Blijft men desondanks met dimensiegetallen werken dan rijst enkel onbegrip, zoals in $1 : -1 = -1 : 1$. Hoe kan groter staat tot kleiner gelijk zijn aan kleiner staat tot groter?
Delen kan feitelijk in realistische uitwerkingen niet aan de orde zijn, alleen *ver*delen. Dus geen inverse bewerking van vermenigvuldigen maar van optellen, dat wil zeggen van metaforen als 'bijeenvoegen' en 'tesamen'. Delen van dimensiegetallen bestaat niet, wel zich verhouden tot, zodat er twee verschillende perspectieven zijn: bijeenvoegen of weglaten en zich verhouden. Beide activiteiten moeten vervolgens in het leerproces geabstraheerd worden tot delen. Hoe men ook manipuleert, men staat voor een didactische crux, want het wiskundig denken staat haaks op het abstraheren. De wiskundige past het algemene toe op het bijzondere en niet omgekeerd. Net als fysische inductie haaks staat op wiskundige inductie. In het wiskundig denken fungeert een element als een algemeen element, doch een reële voorstelling kan dit niet.
De realist introduceert 'delen' als herhaald aftrekken, want daar komt een visuele voorstelling op neer. $7 : 2$ is geen probleem, haal twee dingen tesamen telkens van zeven dingen weg. Wat te doen echter met $2 : 7$? Zeven dingen telkens tesamen van twee dingen afhalen is de methode. Hoe is 7 herhaald aftrekbaar van 2? Door met tekorten te werken, zal de leerling denken als hij daarop getraind is en dan is hij volstrekt verdwaald in het donkere bos der werkelijkheid.

Noot [1] Zie Euclides 67-2.

● 40 jaar geleden ● ●

▶ Vraagstukken

3479. Als $0 < x < \sqrt{2}$, dan is

$$\frac{4x}{4-x^2} < \operatorname{tg} x < \frac{2x}{2-x^2}$$

Bewijs dit en bereken daarna tg 1° in 6 decimalen nauwkeurig.

3480. *Centrale projectie. Alle maten in cm; papierformaat* 30×50; *distantie* 10. De rechte l ligt in τ en loopt op een afstand 12 evenwijdig aan de lange onderzijde van het papier. Op l ligt het middelpunt O_1 van de distantiecirkel δ en wel 6 van de linker papierrand. De punten A en B liggen op δ; $AB \perp l$ en $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$. Op l ligt het punt V rechts van O_1 zo, dat $\overline{O_1V} = \overline{AB}$. Een rechte a heeft V tot vluchtpunt en het midden D van $\overline{AB}$ tot doorgangspunt. Het punt C van a heeft tot centrale projectie het meest naar rechts gelegen punt C' van δ. De omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is het grondvlak van een rechte cylinder. Het bovenvlak van deze cylinder heeft tot centrale projectie een parabool. Construeer de schijnbare omtrek van deze cylinder en zijn doorsnijding met τ (2 gevallen).

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 39 (1951-1952).

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Oplossing 631

Sinds vorig jaar is in de winkel DIGI-DISC te koop, een manipulatie-puzzel met 7 magnetische schijven. *Joop van der Vaart* (5), Delft vertelde mij dat hij al jaren de DO-DO RINGS in zijn omvangrijke puzzelcollectie heeft. (Made in Israel by Sharon Intl.). Vergelijking van de 2 puzzels levert op:

	DIGI-DISC	DO-DO RINGS
1-2-3-4	Niet aanwezig	Niet aanwezig
1-2-4-3	Niet aanwezig	Blue
1-3-2-4	Red	Green
1-3-4-2	Green	Red
1-4-2-3	Yellow	Yellow
1-4-3-2	Orange	Orange
+ − × /	Niet aanwezig	Niet aanwezig
+ − / ×	Niet aanwezig	Green
+ × − /	Blue	Orange
+ × / −	Violet	Niet aanwezig
+ / − ×	Niet aanwezig	Niet aanwezig
+ / × −	Niet aanwezig	Blue
= = = =	White	White

Als 'meester-uitdaging' vroeg ik u de 7 ringen van de Digi-disc zo aan elkaar te maken dat rondom 4 geldige sommen stonden. De =-ring als 6e ring. Met de computer had ik de volgende 3 oplossingen gevonden (ik noem eerst de kleurvolgorde van de ringen, daarna één som; de andere sommen volgen dan automatisch):

OVGBYWR: $1/1 + 3 = 4$, GBRVOWY: $1 + 3/1 = 4$,
RVOBYWG: $1 + 3 \times 1 = 4$.

Maar al gauw bleek dat ik volgens sommigen wel zeer ouderwets bezig was. Ze schreven me dat vermenigvuldigen **al lang** niet meer voor delen gaat. We moeten 'gewoon' de volgorde van het rekenapparaat aanhouden! Na deze reacties heb ik eens geïnformeerd bij collega's. Toen werd de verwarring alsmaar groter: naar mijn bescheiden mening is er geen eensgezindheid in Nederland wat betreft de voorrangsregels bij het rekenen. Uiteindelijk bleken dus eigenlijk **alleen** de volgende 6 oplossingen te voldoen:

OVGBYWR: $1/1 + 3 = 4$, OBYVGWR: $1 + 3/1 = 4$,
OBYVRWG: $1 - 1 + 1 = 1$, OBRVYWG: $1 - 2 + 2 = 1$,
RVOBYWG: $1 + 3 \times 1 = 4$, RBGVOWY: $1/2 \times 2 = 1$

Bij de 'starters-uitdaging' gebruiken we slechts 5 ringen. Dan zijn er 2 oplossingen: OBYWG: $1 \times 4 = 4$ en GBYWO: $1 \times 3 = 3$. Dit zijn ook de enige twee oplossingen als we 5 ringen van de Do-Do rings gebruiken!

Als we alle ringen van de Do-Do rings gebruiken dan zijn er vele oplossingen. Bijvoorbeeld: ROGGOBBWY: $1/3 + 2/3 = 1$ of GBBOYWOGR: $1 \times 2/1 = 2/1$

Jacques Haubrich (5), Eindhoven heeft dit probleem uitgebreid bestudeerd met alle denkbare ringen. Dan blijkt dat er best combinaties van ringen te vinden zijn, die maar één unieke oplossing hebben. De mooiste die hij vond, wil ik u niet onthouden. Ik geef nu alle vier sommen:

$1 \times 2 - 1 = 1$ $4 - 1 \times 2 = 2$ $3/3 + 3 = 4$ $2 + 4/4 = 3$

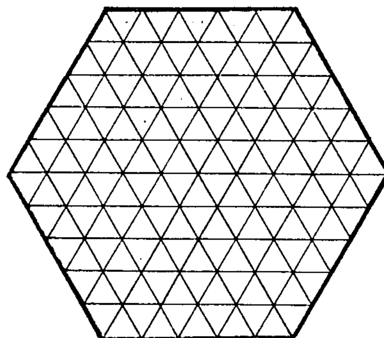
Van elke ring is nu ook het complement aanwezig, d.w.z. zowel linksom lezend als rechtsom lezend. Verder is dit de unieke oplossing met deze ringen. Heel hartelijk dank, Jacques, voor deze informatie.

Met 34 punten is winnaar van de boekenbon geworden: *Willem van der Vegt*, Reggelaan 58, 8033 AW Zwolle. Hartelijk gefeliciteerd met je prijs!

▶ Opgave 634

Isometrisch papier heeft op leerlingen altijd een grotere aantrekkingskracht dan 'gewoon' ruitjespapier. Onlangs hebben we de Stelling van Pythagoras op dit 'driehoekjespapier' bekeken. Het bleek dat een zeshoek met zijde 3 54 driehoekjes bevatte. Met zijde 4 heeft een zeshoek 96 driehoekjes. Tot grote verbazing van de leerlingen, en eigenlijk ook tot mijn eigen verbazing, bleek een zeshoek met zijde 5 in totaal 150 driehoekjes te bevatten. Kortom: de oppervlakte van de twee kleine zeshoekjes samen is gelijk aan de oppervlakte van de grote zeshoek. Dat betekent dus dat deze grote zeshoek te verknippen is in stukken, waarmee de kleinere te maken zijn. Als we de stukken niet mogen omdraaien, in hoeveel stukken moeten we de grote zeshoek dan minstens verknippen?

Iedereen die inzendt kan punten verdienen, maar alleen de superknipper met het minste aantal stukken ontvangt de 5 ladderpunten. Inzendtermijn sluit over een maand.



● **Bijdrage** ● ● ● ●

▶ Over de helderheid van een verheldering

J. Bouw, O. P. Fransen-van Wier, A. Kuipers, J. M. Waalwijk

Er was eens iemand die een artikel schreef. 'Waarvoor, waartoe', zo kan men vragen, schreef hij dat artikel? Het antwoord op deze vraag vonden wij in een tweede artikel 'Ter verheldering' geheten. In het eerste artikel[1] schreef hij namelijk een aantal niet-duidelijke 'bitse afkeuringen' en 'erg cryptische aanmerkingen', zodat het haast niet anders kon of er moesten wel lezers op reageren. Welnu: dit gelukte hem.[2] Hoewel deze tactiek in een lessituatie vruchten kan afwerpen, vinden wij het merkwaardig dat, wanneer men kritiek heeft op een bepaald soort wiskundeonderwijs, men niet *meteen* in een hierover geschreven artikel de motieven en argumenten geeft. Maar dit nu terzijde. Piet Verstappen slaagt er wat ons betreft in duidelijk te maken – iets wat hij in z'n eerste artikel ook al had kunnen schrijven – dat een bepaald soort wiskundeonderwijs hem niet aanstaat, omdat het niet aan de criteria die hij belangrijk acht, beantwoordt.
– De criteria die hij belangrijk acht, zijn:

a vraagstukken moeten een praktische toepassing hebben,

b wiskundige opdrachten moeten iets extra's bieden,

c de bestede tijd en inspanning moeten een investering zijn die rendement geeft.

– Met betrekking tot het eerste is het naar zijn oordeel absurd om het vraagstuk over de paginanummers aan leerlingen voor te leggen. 'Bent u ooit iemand in het dagelijks leven tegengekomen met zo'n probleem?' zo roept hij uit! Naar onze mening is het goed te beseffen dat, wanneer men steeds maar vraagt naar de directe toepasbaarheid, er dan ook een afweging gemaakt zou moeten worden, waarbij *andere* aspecten van een vraagstuk aan bod komen. Zo is in het genoemde 'paginanummervraagstuk' belangrijk het kunnen 'vertalen' van een in woorden gesteld probleem naar een kwadratische vergelijking. Het lijkt ons een niet onbelangrijke vaardigheid om bijvoorbeeld met het oog op wiskunde A te kunnen abstraheren en formaliseren. In het licht daarvan vinden wij de hier bovengenoemde vraag die Piet Verstappen stelt van ondergeschikt belang. Bovendien vinden wij het commentaar 'wat moeten leerlingen niet denken van een dergelijke wiskunde?' tamelijk ver buiten de realiteit staan. Middelbare scholieren zijn geen verlengstuk van de opvattingen van Piet Verstappen en kunnen vaak niet beoordelen wat wel en wat niet praktisch toegepast kan worden.
Verder is het zo dat allerlei wiskunde-opgaven, die wèl aan het criterium van de praktische toepasbaarheid voldoen, een zozeer 'uitgebeend' wiskundig model geven, dat men van dit soort praktische toepassingen niet veel wijzer wordt. Dit komt onder meer, omdat een meer realistisch model een beroep moet doen op een veel uitgebreidere kennis van de wiskunde dan de leerlingen op dit niveau verworven hebben.

– Het tweede voorbeeld van de vergelijking $(x^2 - x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$ kan ook geen genade vinden in de ogen van Piet Verstappen en weer is de praktische toepassing de 'bottle-neck'. Bovendien blijkt het volgens hem zo te zijn, dat als men 'aptitude tests' en 'achievement tests' niet uit elkaar kan houden, men *nog* (sic!) 'niet beseffen kan dat dit een fout vraagstuk is.'

Wij denken dat wéér voorbijgegaan wordt aan andere belangrijke aspecten van zo'n vraagstuk.

Bijvoorbeeld: het kunnen overzien en analyseren van een aantal mogelijke gevallen. Juist dit laatste lijkt ons *model* te staan voor tal van problemen waarop men met behulp van de wiskunde antwoorden zoekt. Wij vinden dit vraagstuk juist een juweeltje.

Ronduit pietluttig en pietepeuterig lijkt ons de kritiek op '3/4 van 18'. In de context waarin zo'n vraag wordt gesteld, is er niemand die denkt aan $17\frac{1}{4}$. Net zo min als de helft van 18 aanleiding geeft tot $17\frac{1}{2}$. En de ten tonele gevoerde Fred die zelfs kinderwagens van 18 door zijn hoofdje laat gaan, bestaat alleen in het redeneerpatroon van de schrijver.
De verscheurdheid van Freds zieleleven treedt ook op wanneer men naar het '3/4 *deel* van 18' vraagt terwijl Fred de deel-geheel relatie niet begrijpt. Het probleem ligt hier niet zozeer in de aard van de vraag, als wel aan de leraar die Fredje zodanig les gaf dat hij deze individuele eigenaardigheden ontwikkelde.

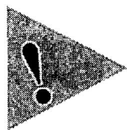
– Ook de manier waarop de deling $7:\frac{1}{2}$ wordt gevisualiseerd 'kan niet door de beugel', vindt Piet Verstappen. Weliswaar kan men *hier* door de deling te interpreteren als herhaald aftrekken duidelijk maken wat de uitkomst is, maar 'wat te doen met 2 : 7?'
Mogen wij Piet Verstappen nu eens antwoorden met een wedervraag? Kan men uitleggen wat de uitkomst is van 1/3 × 1/4 door vermenigvuldigen te interpreteren als herhaald optellen? Hopelijk trekt hij uit het antwoord ook niet de conclusie dat de uitleg: $3 \times 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ daaròm ongewenst is, omdat er situaties te bedenken zijn waarin die interpretatie van vermenigvuldigen de leerling 'doet verdwalen in het donkere bos der werkelijkheid'! Van verdwalen is geen sprake, wel van pragmatische didactiek! Wij zouden nog meer vraagtekens kunnen plaatsen bij bepaalde opmerkingen in dit tweede stukje van Piet Verstappen en wij vinden dat jammer – wij hadden liever een stuk gelezen dat helder geschreven was, ook al zouden wij het er niet mee eens zijn geweest.

Maar evenals wij bij ons vorig commentaar in het oktobernummer al schreven: wij zijn niet uit op een welles-nietes spelletje. Van ons mag de discussie gesloten worden.

***De auteurs** zijn allen docent wiskunde en/of informatica aan de Hogeschool Holland, dependance Dordrecht.*

Noten

1. P. Verstappen, Amerikaanse didactische richtlijnen, Euclides 66-8 (mei 1991).
2. J. Bouw, O. P. Fransen-van Wier, A. Kuipers, J. M. Waalwijk, Kritiek op commentaar, Euclides 67-2 (oktober 1991).



Kalender

20 maart 1992: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.
21 maart 1992: Utrecht, Congresdag t.g.v. het tweede lustrum van Vrouwen en Wiskunde. Zie Euclides 67-5 blz. 143.
26 maart 1992: Eindhoven, Regionale bijeenkomst over de grafische rekenmachine. Zie blz. 183.
8 april 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
22 en 23 april 1992: Delft, Nederlands Mathematisch Congres. Zie blz. 174.
13 mei 1992: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
10 juni 1992: Utrecht Bestuursvergadering NVvW.
4 september 1992: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.

Inhoud